

Sessió 4: Teoremes sobre triangles 2. Resolució de triangles.

Fitxa 8: La recta d'Euler. (fitxa8.fig).

Fitxa 9: Teorema de Ceva. (fitxa9.fig).

Activitats de resolució de triangles.

Activitat 10: Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts els costats a, b, c . (activ10.fig).

Activitat 11: Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts a, c, A . (activ11.fig).

Activitat 12: Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts b, c, A . (activ12.fig).

Activitat 13: Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts A, B, a . (activ13.fig).

Activitat 14: Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts A, B, c . (activ14.fig).

Activitat 15: Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a, b, h_A . (activ15.fig).

Activitat 16: Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a, h_A, h_B . (activ16.fig).

Activitat 17: Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts h_A, h_B i l'angle B . (activ17.fig).

Activitat 18: Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a, b , i la mitjana m_A . (activ18.fig).

Activitat 19: Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a, b , i la mitjana m_C . (activ19.fig).

Activitat 20: Construïu el triangle $\triangle ABC$, conegudes les tres altures h_A, h_B, h_C .
(activ20.fig).

Activitat 21: Construïu el triangle $\triangle ABC$, conegudes les tres mitjanes m_A, m_B, m_C .
(activ21.fig).

Fitxa 8: La recta d'Euler.

El baricentre de qualsevol triangle està alineat amb l'ortocentre i el circumcentre, i a doble distància del primer que del segon. A la recta que uneix els tres punts s'anomena **recta d'Euler**.

- a) Dibuixeu un triangle $\triangle ABC$.
- b) Dibuixeu el baricentre (intersecció de les mitjanes).
- b1) Dibuixeu el punt mig de dos costats.
 - b2) Dibuixeu les dos mitjanes a aquests costats.
 - b3) Determineu el punt G intersecció de les dues mitjanes
 - b4) Oculteu les mitjanes.
- c) Dibuixeu l'ortocentre.
- c1) Dibuixeu dues rectes altures (rectes perpendiculars al costat que passen pel vèrtex oposat).
 - c2) Determineu el punt H intersecció de les dues altures.
 - c3) Oculteu les rectes altures.
- d) Dibuixeu dues mediatris.
- d1) Traceu una recta perpendicular al costat que passe pel punt mig. Fes l'operació a dos costats.
 - d2) Determineu el punt Z intersecció de les dues mediatris.
 - d3) Oculteu les rectes mediatris.
 - d4) Oculteu els punt mig dels costats.
- e) Dibuixeu la recta r (recta d'Euler) que passa pels punts G i H.
- f) Comproveu que el punt Z pertany a la recta r.
- g) Dibuixeu els segments \overline{ZG} i \overline{GH} .
- h) Calculeu la mesura dels dos segments.
- i) Comproveu que $\overline{GH} = 2\overline{ZG}$

Creeu una macro que donat un triangle dibuixi la recta d'Euler.

Fitxa 9: Teorema de G. Ceva (1648-1734)

Teorema de Ceva.

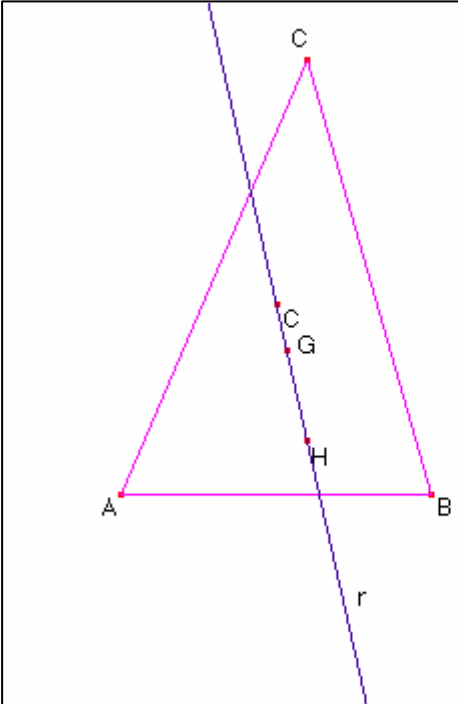
La condició suficient i necessària per a què rectes que passen pels vèrtexs A, B, C d'un triangle i pels punts D, E, F, dels costats oposats siguin concurrents és que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

Procés de construcció:

- a) Dibuixeu un triangle $\triangle ABC$
- b) Dibuixeu un punt T interior al triangle.
- c) Dibuixeu tres rectes r, s, t que passen per CT, AT, BT (respectivament).
- d) Determineu els punts D, E, F intersecció d'aquestes rectes amb el triangle.
- e) Oculteu les tres rectes.
- f) Dibuixeu els segments CD, AE, BF.
- g) Calculeu quant amiden els segments AD, BD, BE, CE, CF, AF.
- h) Comproveu amb ajut de la calculadora que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$
- i) Arrossegueu T i observeu que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$
- j) Dibuixeu un triangle $\triangle ABC$
- k) Determineu tres punts D, E, F, dels costats AB, BC, CA, respectivament.
- l) Dibuixeu els segments CD, AE, BF.
- m) Determineu el punt T intersecció dels segments AE, CD.
- n) Determineu el punt intersecció dels segments BF, AE.
- o) Calculeu quant amiden els segments AD, BD, BE, CE, CF, AF.
- p) Calculeu amb ajut de la calculadora que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$
- q) Arrossegueu D, E, F i vegeu com varia $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$
- r) Observeu que només quan en els tres segments coincideixen, aleshores, $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Una possible solució a la fitxa 8. Recta d'Euler.



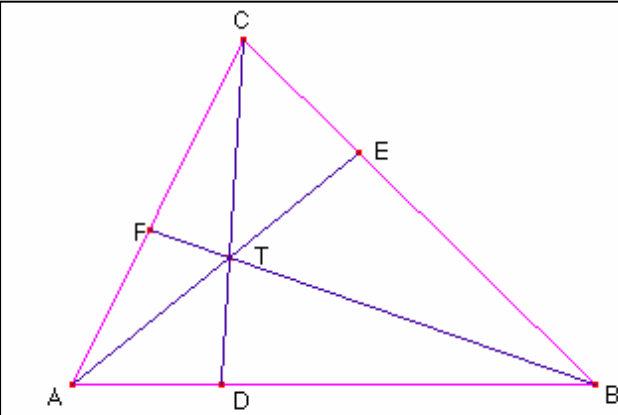
C=Circumcentre
G=Baricentre
H=ortocentre
la recta r passa per GH.
Passa C (circumcentre) per r?
Este punto está sobre el objeto

r s'anomena **RECTA D'EULER**

CG= 0,78 cm
GH= 1,56 cm

Observa que $GH=2CG$

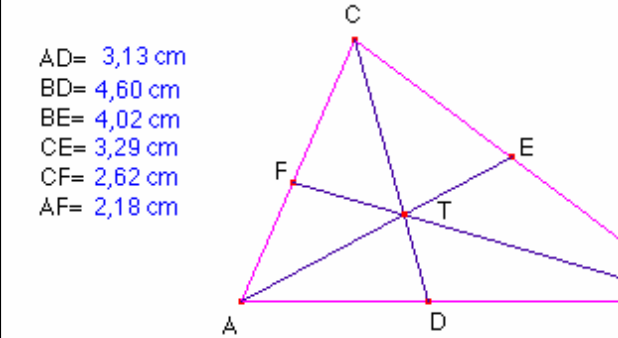
Una possible solució a la fitxa 9. Teorema de Ceva.



Teorema de Ceva
AD= 2,50 cm
BD= 6,27 cm
BE= 5,55 cm
CE= 2,72 cm
CF= 3,57 cm
AF= 2,90 cm

$(AD:BD)(BE:CE)(CF:AF)=$
Resultado : 1,00

Arossegueu T
i veureu que la tesi es compleix



AD= 3,13 cm
BD= 4,60 cm
BE= 4,02 cm
CE= 3,29 cm
CF= 2,62 cm
AF= 2,18 cm

$(AD:BD)(BE:CE)(CF:AF)=$
Resultado : 1,00

Arossegueu C, E, o F i veureu que
els segments s'uneixen en el punt T
si es compleix la tesi del teorema

Activitat 10:

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts els costats a, b, c.

- Definiu el valor dels costats a, b, c. (Edició numèrica).
- Dibuixeu una semirecta r d'origen el punt C.
- Transferiu-li la mesura a a la semirecta r. Anomeneu el punt B
- Transferiu-li la mesura b al punt C. Anomeneu el punt X
- Dibuixeu una circumferència de centre C que passe pel punt X.
- Transferiu-li la mesura c al punt B. Anomeneu el punt Y.
- Dibuixeu una circumferència de centre B que passe pel punt Y.
- Feu la intersecció de les dues circumferències anteriors, anomeneu els punts A, A'
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$
- Oculteu allò innecessari.
- Calculeu la mesura dels angles del triangle $\triangle ABC$.
- Amb ajut de la calculadora comproveu el teorema del cosinus.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Resolució de triaangles coneguts els 3 costats.

a= 5

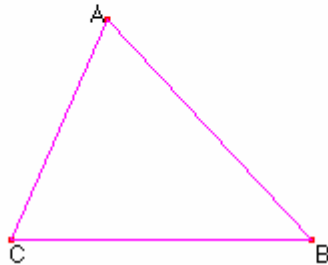
b= 4

c= 5

A= 66,422 °

B= 47,156 °

C= 66,422 °



Activitat 11.

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts a, c, A .

- Definiu els valors dels costats a, c . (Opció edició numèrica).
- Definiu l'angle $\alpha = \angle BAC$. (Opció edició numèrica).
- Dibuixeu la semirecta r d'origen A .
- Transferiu-li el valor c a la semirecta. Anomeneu el punt B .
- Feu una rotació s de la semirecta r amb centre A i angle α .
- Transferiu-li el valor a al punt B . Anomeneu-lo N .
- Dibuixeu la circumferència de centre B que passa per N .
- Feu la intersecció de la semirecta s i la circumferència. Definiu C, C' .
- Dibuixeu els triangles $\triangle ABC, \triangle AB'C'$
- Calculeu b, B, C .
- Calculeu b', B', C'

Dades

$c = 4$

$a = 2$

$A = 15$

Resultats

$b = 2,15 \text{ cm}$

$b' = 5,57 \text{ cm}$

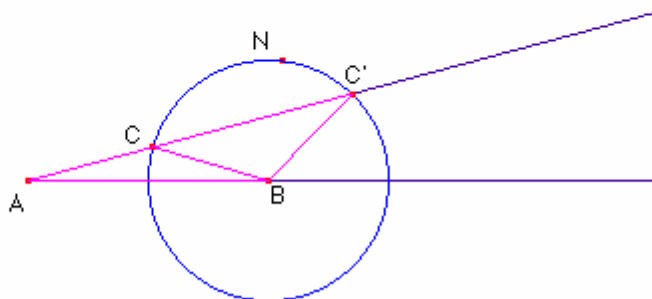
$B = 16,2^\circ$

$B' = 133,8^\circ$

$C = 148,8^\circ$

$C' = 31,2^\circ$

Resolució d'un triangle coneguts a, c, A



Activitat 12.

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts b, c, A .

- Definiu els costats b, c . (Edició numèrica).
- Definiu l'angle $\alpha = \angle BAC$. (Opció edició numèrica).
- Dibuixeu la semirecta r d'origen A .
- Feu una rotació s a la recta r amb centre a i angle α .
- Transferiu a la semirecta r el valor b . Anomeneu-lo C .
- Transferiu a la semirecta s el valor c . Anomeneu-lo B .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu el costat a i els angles $\angle ABC, \angle ACB$.

Resolució d'un triangle coneguts b, c, A

Dades:

$$b = 3$$

$$c = 4$$

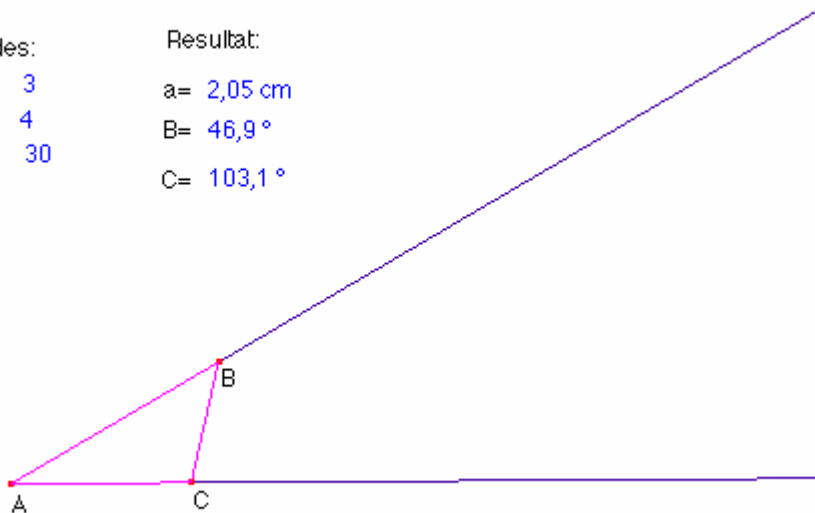
$$A = 30$$

Resultat:

$$a = 2,05 \text{ cm}$$

$$B = 46,9^\circ$$

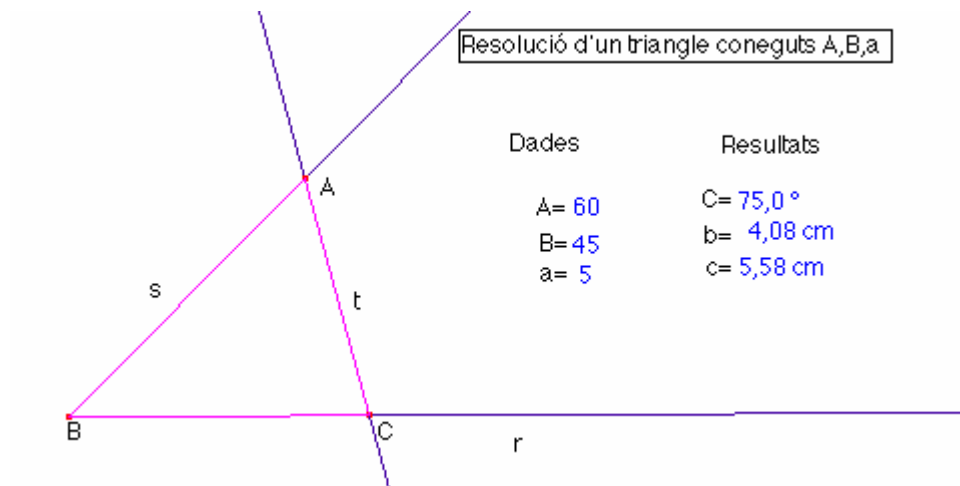
$$C = 103,1^\circ$$



Activitat 13.

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts A, B, a .

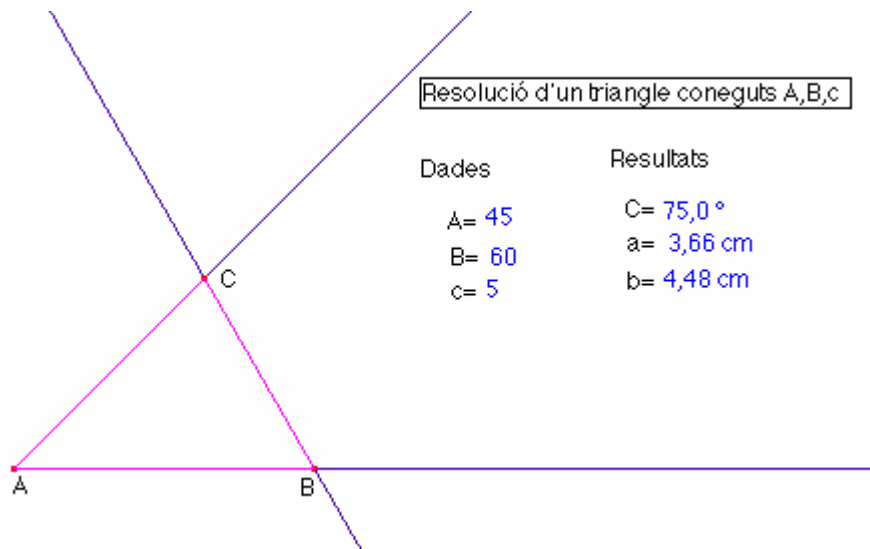
- Definiu els valors A, B, a .
- Definiu l'angle $\alpha=A+B$.
- Dibuixeu la semirecta r d'origen B .
- Transferiu a la semirecta r el valor a . Anomeneu el punt C .
- Feu una rotació s a la semirecta r d'angle B i centre B .
- Feu una rotació t a la semirecta r d'angle α i centre C .
- Feu la intersecció de les rectes s, t . Anomeneu el punt A .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu l'angle C i els costats b, c .



Activitat 14.

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts A, B, c.

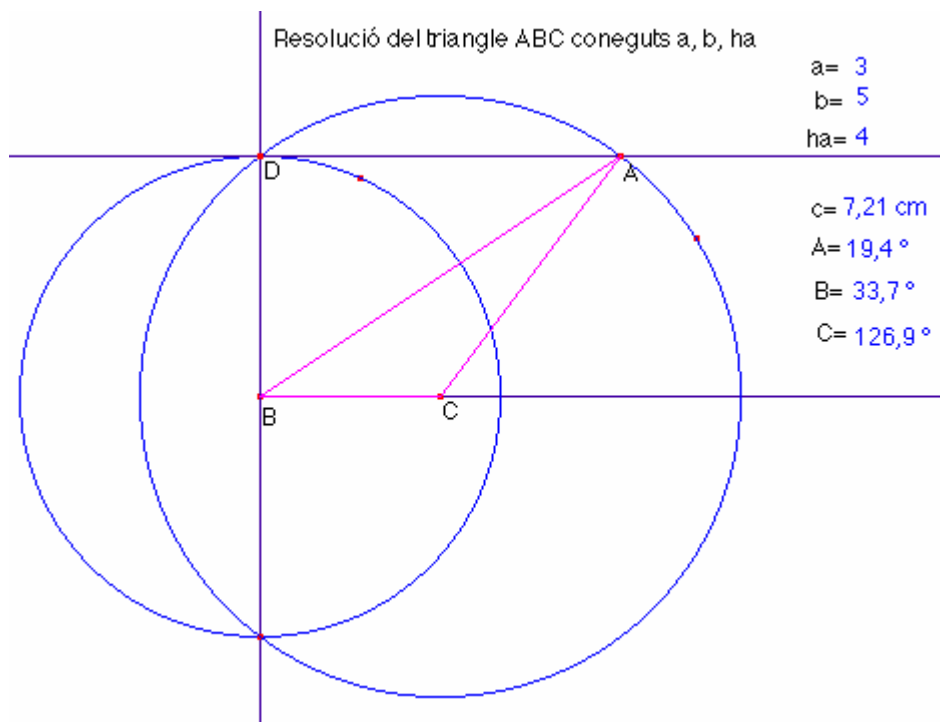
- Definiu els valors A, B, c.
- Definiu l'angle $\alpha = 180^\circ - B$.
- Dibuixeu la semirecta r d'origen A.
- Transferiu a la semirecta r el valor a. Anomeneu el punt B.
- Feu una rotació s a la semirecta r d'angle A i centre A.
- Feu una rotació t a la semirecta r d'angle α i centre B.
- Feu la intersecció de les rectes s, t. Anomeneu el punt C.
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu l'angle C i els costats a, b.



Activitat 15.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a , b , h_A .

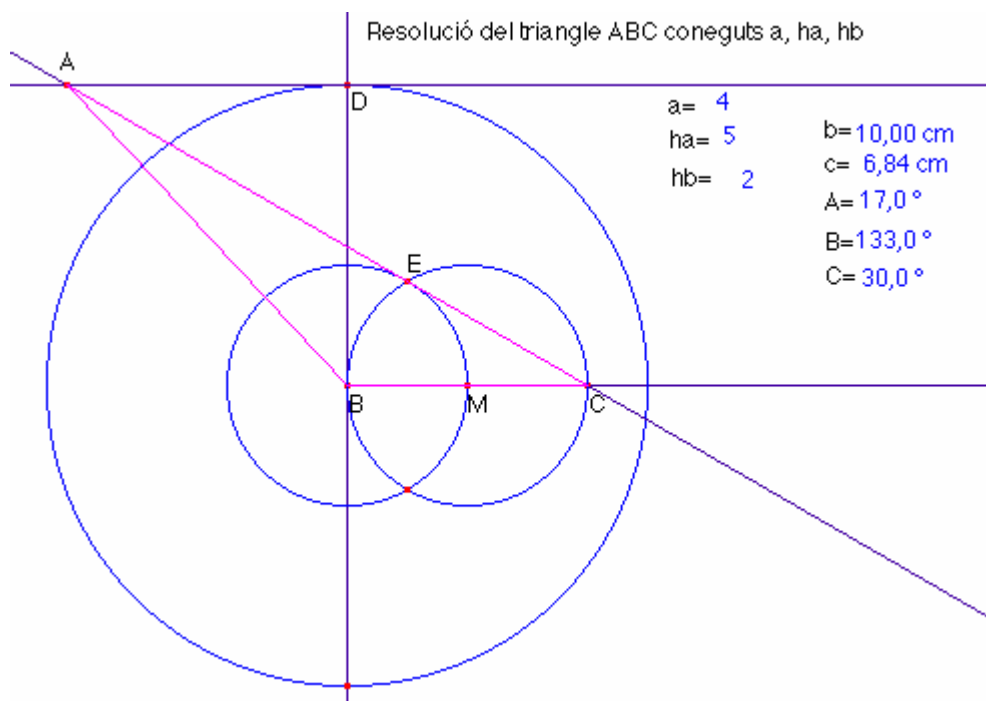
- Definiu els valors a , b , h_A . (Opció edició numèrica).
- Dibuixeu la semirecta r d'origen B .
- Transferiu el valor a a la semirecta r . Anomeneu el punt C .
- Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta s que passa pel punt B .
- Transferiu el valor h_A al punt B .
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A .
- Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1 . Anomeneu el punt D .
- Dibuixeu la recta u paral·lela a la semirecta r que passa pel punt D .
- Transferiu el valor b al punt C .
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C i radi b .
- Feu la intersecció de la recta u i la circumferència C_2 . Anomeneu el punt A .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu el costat c i els angles A , B , C .



Activitat 16.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a , h_A , h_B .

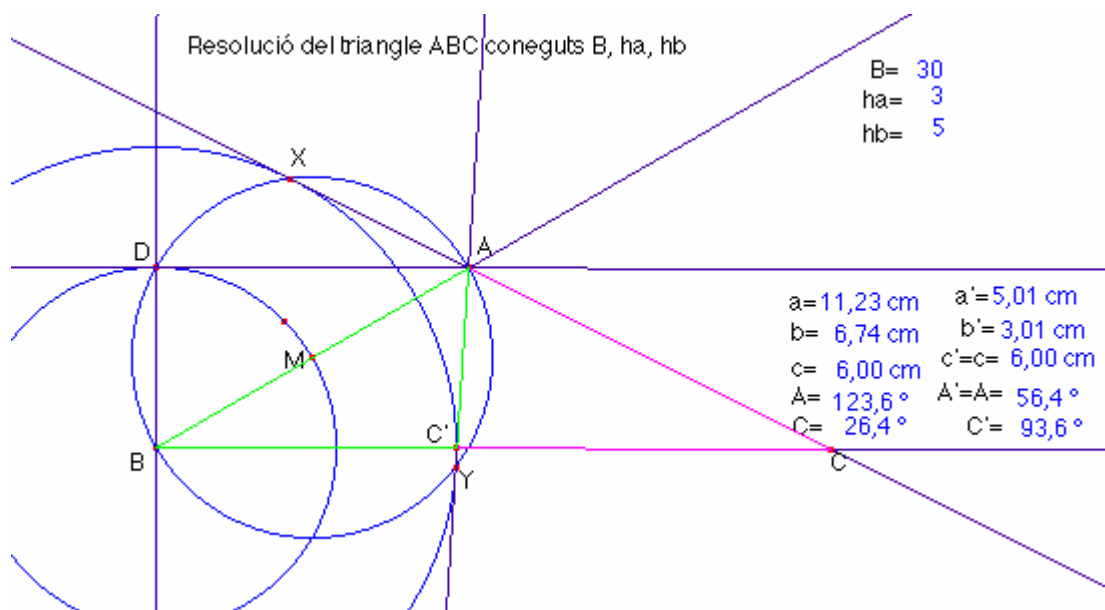
- Definiu els valors a , h_A , h_B . (Opció edició numèrica).
- Dibuixeu la semirecta r d'origen B .
- Transferiu a la semirecta r el valor a . Anomeneu el punt C .
- Dibuixeu la recta s perpendicular a r que passa pel punt B .
- Transferiu al punt B el valor h_A .
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A .
- Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1 . Anomeneu el punt D .
- Dibuixeu la recta t paral·lela a la semirecta r que passa pel punt D .
- Transferiu al punt B el valor h_B .
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi h_B .
- Dibuixeu el punt mig M del segment \overline{BC} .
- Dibuixeu la circumferència C_3 de centre M que passa pel punt B .
- Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3 . Anomeneu el punt E .
- Dibuixeu la recta u que passa pels punts C, E .
- Feu la intersecció de les rectes t, u . Anomeneu el punt A .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu els costats b, c , i els angles A, B, C .



Activitat 17.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts h_A, h_B i l'angle B.

- Definiu els valors h_A, h_B i l'angle $\alpha = \angle ABC$.
- Dibuixeu la semirecta r d'origen B.
- Feu una rotació s de la semirecta r amb centre B i angle α .
- Dibuixeu la recta t perpendicular a r que passa pel punt B.
- Transferiu el valor h_A al punt B.
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A .
- Feu la intersecció de la recta t i la circumferència C_1 . Anomeneu el punt D.
- Dibuixeu la recta w paral·lela a la semirecta r que passa pel punt D.
- Feu la intersecció de s i t . Anomeneu el punt A.
- Transferiu el valor h_B al punt B.
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi h_B .
- Dibuixeu el punt mig M del segment \overline{BA} .
- Dibuixeu la circumferència C_3 de centre M que passa pel punt A.
- Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3 . Anomeneu els punts X, Y. (El problema pot tenir 0, 1, o 2 solucions).
- Dibuixeu la recta m que passa pels punts A, X.
- Feu la intersecció de r i m . Anomeneu el punt C.
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu els costats i els angles del triangle $\triangle ABC$.
- Dibuixeu la recta n que passa pels punts A, Y.
- Feu la intersecció de r i n . Anomeneu el punt C'.
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC'$.
- Calculeu els costats i els angles del triangle $\triangle ABC'$.

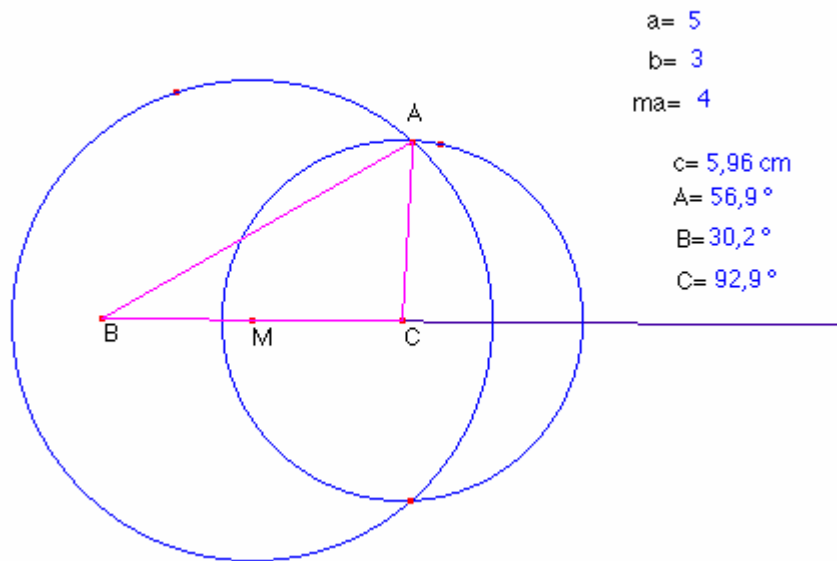


Activitat 18.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a , b , i la mitjana m_A .

- Definiu els valors a , b , i la mitjana m_A .
- Dibuixeu la semirecta r d'origen B .
- Transferiu a la semirecta r el valor a . Anomeneu el punt C .
- Dibuixeu el punt mig M del segment \overline{BC} .
- Transferiu al punt M el valor m_A .
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre M i radi m_A .
- Transferiu al punt C el valor b .
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C i radi b .
- Feu la intersecció de les circumferències C_1, C_2 . Anomeneu el punt A .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- Calculeu els costats i els angles del triangle $\triangle ABC$.

Resolució del triangle ABC coneguts a , b i la mitjana m_a

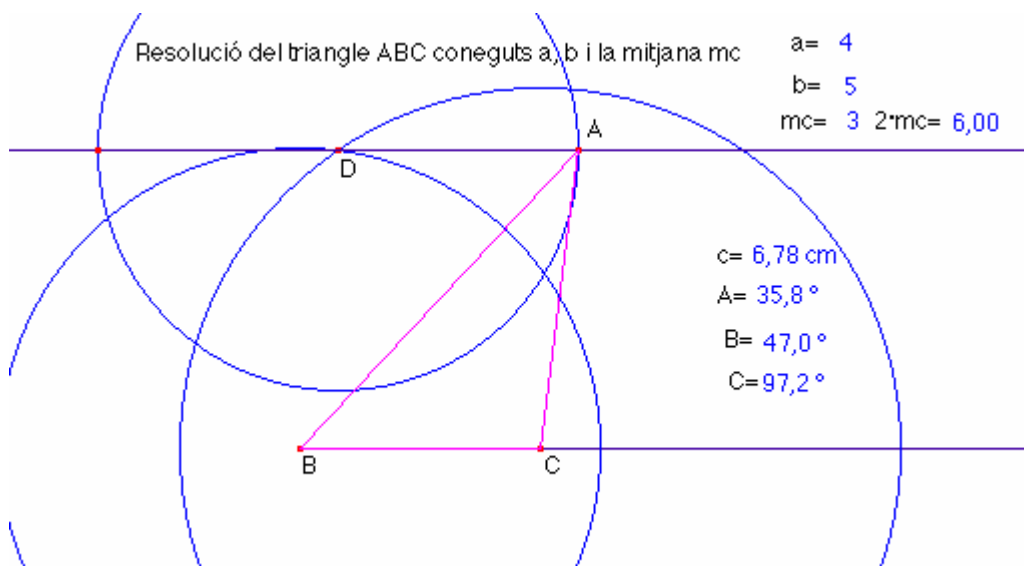


Activitat 19.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, coneguts a , b , i la mitjana m_c .

- a) Definiu els valors a , b , i la mitjana m_c .
- b) Calculeu $x = 2 \cdot m_c$
- c) Dibuixeu la semirecta r d'origen B .
- d) Transferiu a la semirecta r el valor a . Anomeneu el punt C .
- e) Dibuixeu un paral·lelogram $BCAD$ tal que $\overline{CD} = 2 \cdot m_c$
 - e1) Transferiu al punt C el valor x .
 - e2) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre C i radi x .
 - e3) Transferiu al punt B el valor b .
 - e4) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi b .
 - e5) Feu la intersecció de les circumferències C_1, C_2 . Anomeneu el punt D .
 - e6) Dibuixeu la recta s paral·lela a r que passa pel punt D .
 - e7) Transferiu al punt D el valor a .
 - e8) Dibuixeu la circumferència C_3 de centre D i radi a .
 - e9) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_3 . Anomeneu el punt A .

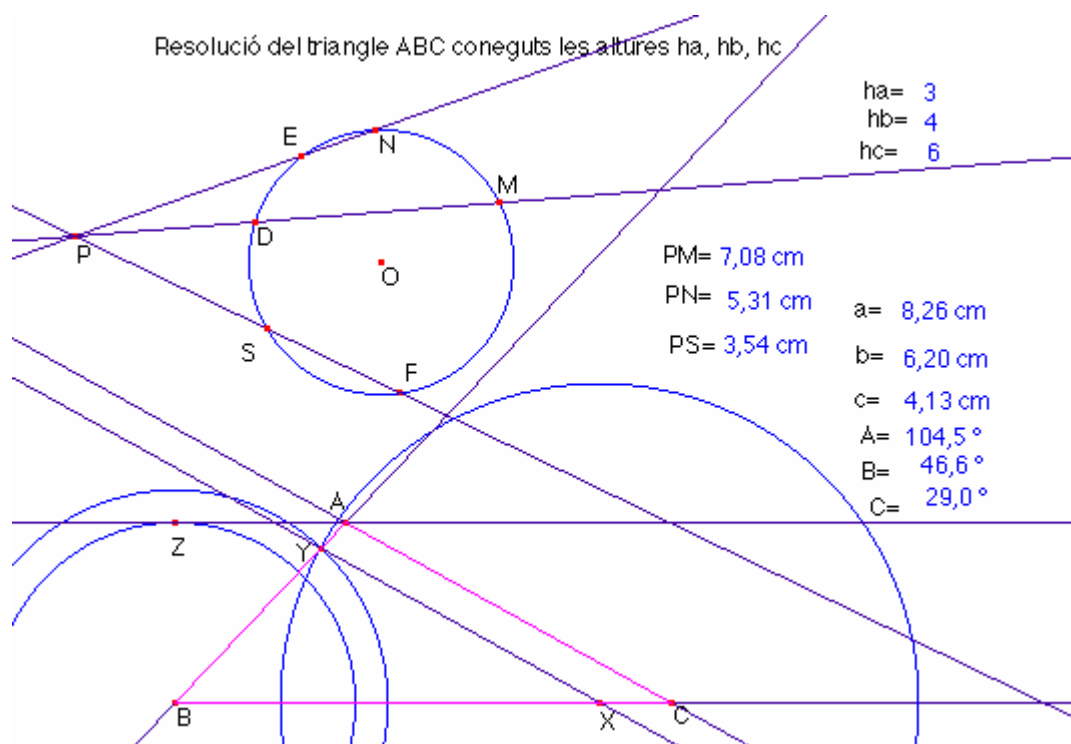
Dels dos punts aquell que forma el paral·lelogram $BCAD$.
- f) Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
- g) Calculeu els valors dels costats i dels angles del triangle $\triangle ABC$.



Activitat 20.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, conegudes les tres altures h_A, h_B, h_C .

- Definiu el valor de les altures h_A, h_B, h_C .
- Dibuixeu el punt P.
- Transferiu al punt P els valors h_A, h_B, h_C . Anomeneu els punts D, E, F, respectivament.
- Dibuixeu la circumferència C_1 circumscrita al triangle $\triangle DEF$.
- Dibuixeu les rectes r, s, t que passen pels punts D, E, F, respectivament.
- Feu la intersecció de les rectes r, s, t amb la circumferència C_1 . Anomeneu els punts M, N, S, respectivament.
- Calculeu els valors $\overline{PM}, \overline{PN}, \overline{PS}$.
- Dibuixeu un triangle $\triangle BXY$ de costats $\overline{PM}, \overline{PN}, \overline{PS}$.
 - Dibuixeu la semirecta m d'origen B. Transferiu a la semirecta r el valor \overline{PM} . Anomeneu el punt X.
 - Transferiu al punt B el valor \overline{PS} . Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi \overline{PS} .
 - Transferiu al punt X el valor \overline{PN} . Dibuixeu la circumferència C_3 de centre X i radi \overline{PN} .
 - Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3 . Anomeneu el punt Y.
- Dibuixeu la recta n perpendicular a m que passa pel punt B.
- Transferiu al punt B el valor h_A .
- Dibuixeu la circumferència C_4 de centre B i radi h_A .
- Feu la intersecció de la recta n i la circumferència C_4 . Anomeneu el punt Z.
- Dibuixeu la recta v paral·lela a r que passa pel punt Z.
- Dibuixeu la recta w que passa pels punts B, Y.
- Feu la intersecció de les rectes v, w. Anomeneu el punt A.
- Dibuixeu la recta f que passa pels punts X, Y.
- Dibuixeu la recta g paral·lela a f que passa pel punt A.
- Feu la intersecció de g i r. Anomeneu el punt C.
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$. Calculeu els costats i els angles del triangle $\triangle ABC$.



Nota:

Aplicant el teorema de la potència del punt P respecte a la circumferència C_1 es verifica:

$\overline{PD} \cdot \overline{PM} = \overline{PE} \cdot \overline{PN} = \overline{PF} \cdot \overline{PS}$, és a dir, que el producte de cada altura h_A, h_B, h_C per $\overline{PM}, \overline{PN}, \overline{PS}$ respectivament és constant.

Per tant el triangle $\hat{A}BC$ i el triangle $\hat{B}XY$ de costats $\overline{PM}, \overline{PN}, \overline{PS}$ són semblants.

Activitat 21.

Construïu el triangle $\triangle ABC$, conegudes les tres mitjanes m_A, m_B, m_C .

- Definiu els valors de les mitjanes m_A, m_B, m_C .
- Calculeu els valors $\frac{2}{3}m_A, \frac{2}{3}m_B, \frac{2}{3}m_C$.
- Construïu el triangle $\triangle ADG$ tal que els costats siguin $\frac{2}{3}m_A, \frac{2}{3}m_B, \frac{2}{3}m_C$.
 - Dibuixeu la semirecta r d'origen A .
 - Transferiu a la semirecta r el valor $\frac{2}{3}m_C$. Anomeneu el punt D .
 - Transferiu al punt A el valor $\frac{2}{3}m_A$. Dibuixeu la circumferència C_1 de centre A i radi $\frac{2}{3}m_A$.
 - Transferiu al punt D el valor $\frac{2}{3}m_B$. Dibuixeu la circumferència C_2 de centre D i radi $\frac{2}{3}m_B$.
 - Feu la intersecció de les circumferències C_1, C_2 . Anomeneu el punt G .
 - Dibuixeu el triangle $\triangle ADG$.
- Dibuixeu el punt mig M_B del segment \overline{GD} .
- Dibuixeu el punt simètric C del punt A respecte del punt M_B .
- Transferiu al punt A el valor m_A . Dibuixeu la circumferència C_3 de centre A i radi m_A .
- Dibuixeu la recta s que passa pels punts A, G .
- Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_3 . Anomeneu el punt M_A .
- Dibuixeu el punt simètric B del punt C respecte del punt M_A .
- Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$. Calculeu els costats i els angles del triangle $\triangle ABC$.

Resolució del triangle ABC conegudes
les mitjanes m_a, m_b, m_c

$$\begin{aligned} m_a &= 3 \quad (2/3)m_a = 2,00 \\ m_b &= 4 \quad (2/3)m_b = 2,67 \\ m_c &= 5 \quad (2/3)m_c = 3,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 5,70 \text{ cm} \\ b &= 4,81 \text{ cm} \\ c &= 3,33 \text{ cm} \\ A &= 86,8^\circ \\ B &= 57,4^\circ \\ C &= 35,8^\circ \end{aligned}$$

