Sessió 5: Els llocs geomètrics.

Fitxa 10: La paràbola. (fitxa10.fig).

Activitat 22. (activ22.fig).
Construïu una paràbola coneguts la directriu d i el vèrtex V.

Activitat 23. (activ23.fig).
Construïu una paràbola coneguts el focus F i el vèrtex V.

Activitat 24. (activ24.fig).
Construïu una el·lipse coneguts el focus i l'eix major.

Activitat 25. (activ25.fig).
Construïu una hipèrbola coneguts el focus i l'eix major.

Activitat 26.- Construcció d'algunes corbes geomètriques.

La corba d'Agnesi. (activ26a.fig).

La cissoide de Diocles. (activ26b.fig).

L'esferoide. (activ26c.fig).

La limaçon (caragol) de Pascal. (activ26d.fig).

L'astroide. (activ26e.fig).

La lemniscata de Bernoulli. (activ26f.fig).

La lemniscata de Geromo. (activ26g.fig).

El foli. (activ26h.fig).

El foli simètric. (activ26i.fig).

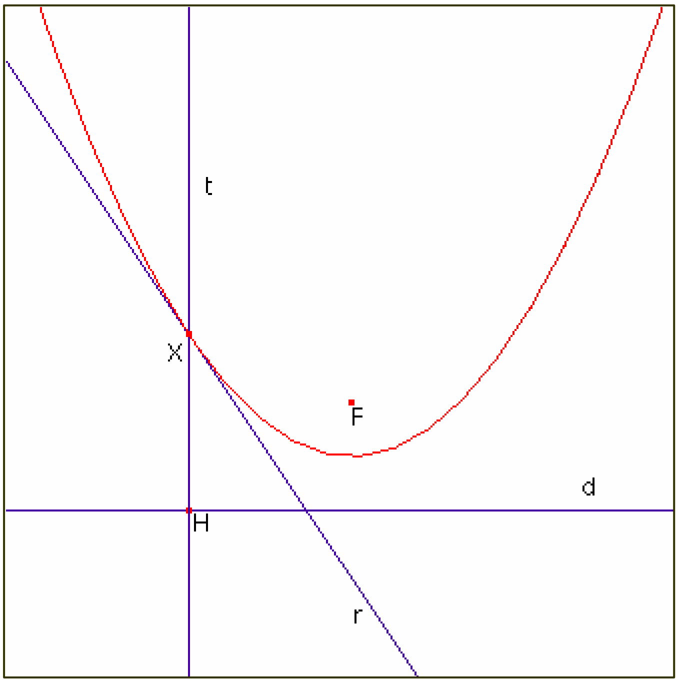
La quàrtica piriforme. (activ26j.fig).

La cicloide. (activ26k.fig).

Fitxa 10: Llocs geomètrics: La paràbola.

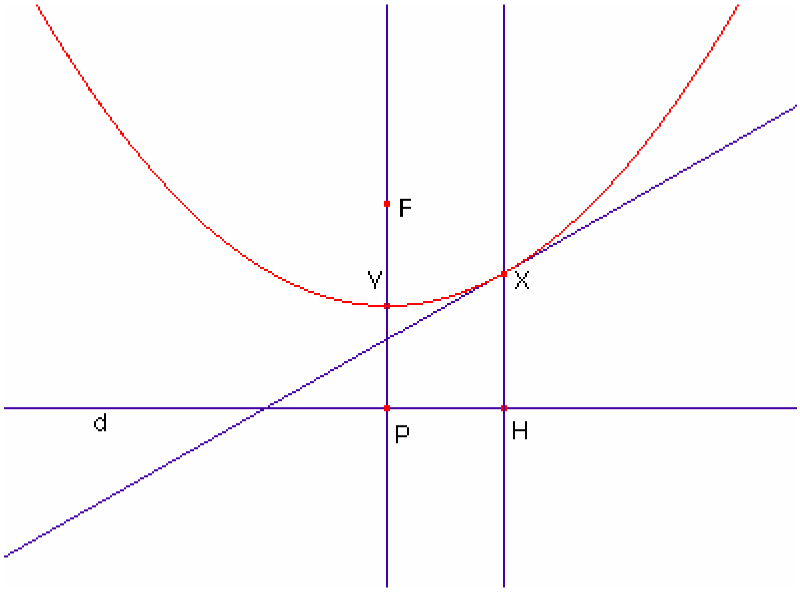
a) La paràbola és el lloc geomètric dels punts del plànol que equidisten d'un punt anomenat focus i d'una recta anomenada directriu.
b) Dibuixeu la recta d (directriu).
c) Dibuixeu un punt F (focus) exterior a la recta d.
d) Dibuixeu un punt H sobre la recta d.
e) Dibuixeu la recta t perpendicular a la recta d que passa pel punt H.
f) Dibuixeu la recta r mediatriu al segment $\overline{FH}$.
g) Feu la intersecció de les rectes r, t. Anomeneu el punt X.
h) Comproveu que $d(X,F) = d(X,d) = d(X,H)$.
i) Dibuixeu el lloc geomètric del punt X al variar H sobre la recta d.

Una possible solució a la fitxa 10. Llocs geomètrics (la paràbola).



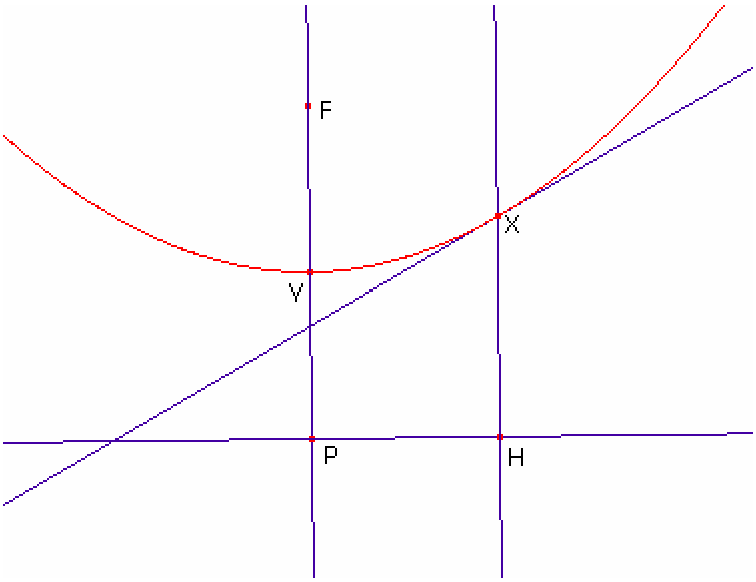
Activitat 22. Solució gràfica.

Reviseu el fitxer activ22.fig i fixeu-vos en el procés de construcció.



Activitat 23. Solució gràfica.

Reviseu el fitxer activ23.fig i fixeu-vos en el procés de construcció.

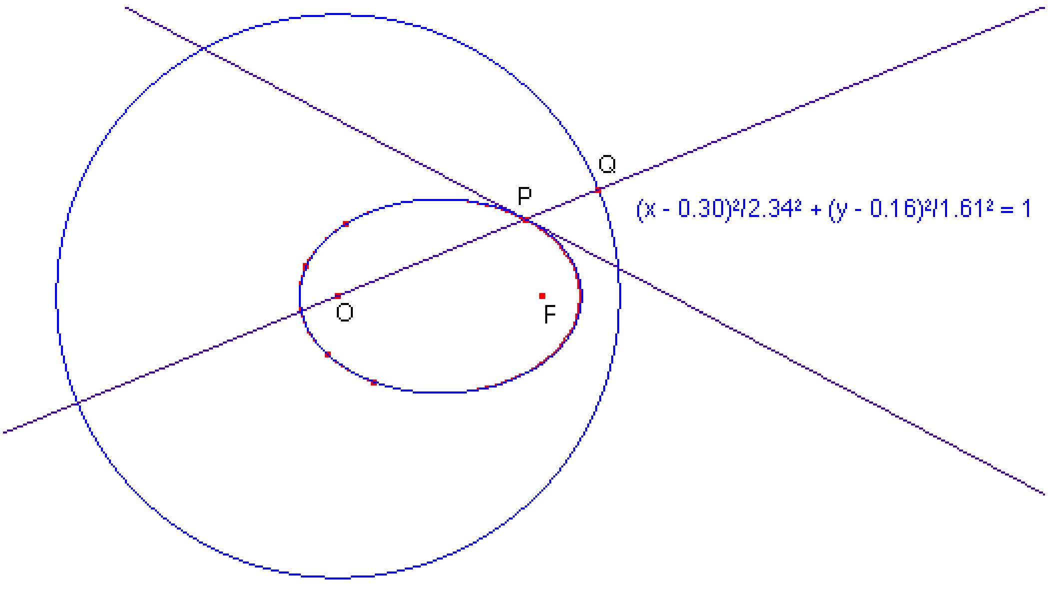


Activitat 24.

Construïu una el lipse coneguts el focus i l'eix major.

Procés de construcció:

a) Dibuixeu una circumferència C_1 de centre O (focus). El radi d'aquesta circumferència és l'eix major.
b) Dibuixeu un punt F (focus) interior a la circumferència.
c) Dibuixeu un punt Q sobre la circumferència C_1.
d) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, Q.
e) Dibuixeu la recta mediatriu m al segment $\overline{FQ}$.
f) Feu la intersecció de les rectes r, m. Anomeneu el punt P.
g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar Q sobre la circumferència.
h) Dibuixeu 4 punts sobre el lloc geomètric.
i) Dibuixeu la cònica que passa pels punts P i els 4 anteriors.
j) Determineu la seua equació.

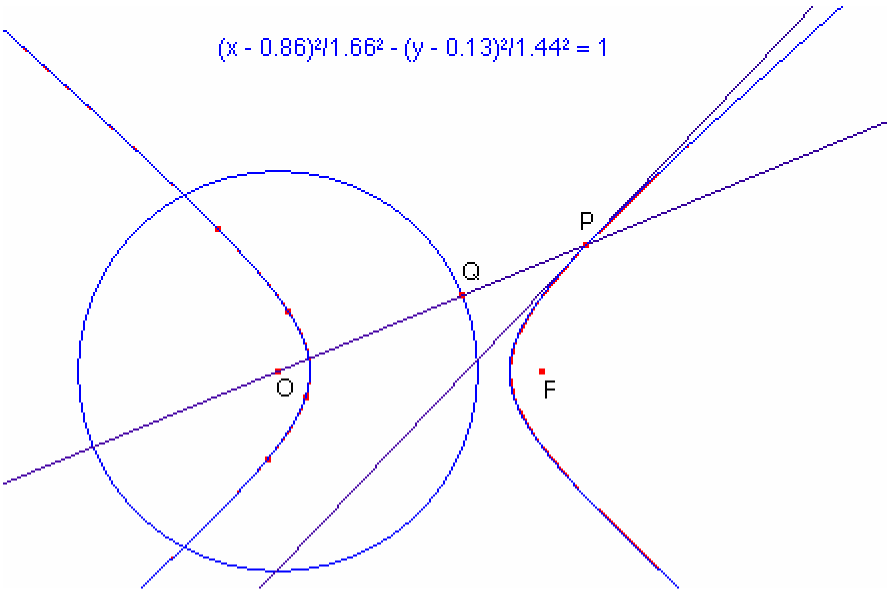


Activitat 25.

Construïu una hipèrbola coneguts el focus i l'eix major.

Procés de construcció:

a) Dibuixeu una circumferència C_1 de centre O (focus). El radi d'aquesta circumferència és l'eix major.
b) Dibuixeu un punt F (focus) exterior a la circumferència.
c) Dibuixeu un punt Q sobre la circumferència C_1.
d) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, Q.
e) Dibuixeu la recta mediatriu m al segment $\overline{FQ}$.
f) Feu la intersecció de les rectes r, m. Anomeneu el punt P.
g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar Q sobre la circumferència.
h) Dibuixeu 4 punts sobre el lloc geomètric.
i) Dibuixeu la cònica que passa pels punts P i els 4 anteriors.
j) Determineu la seua equació.



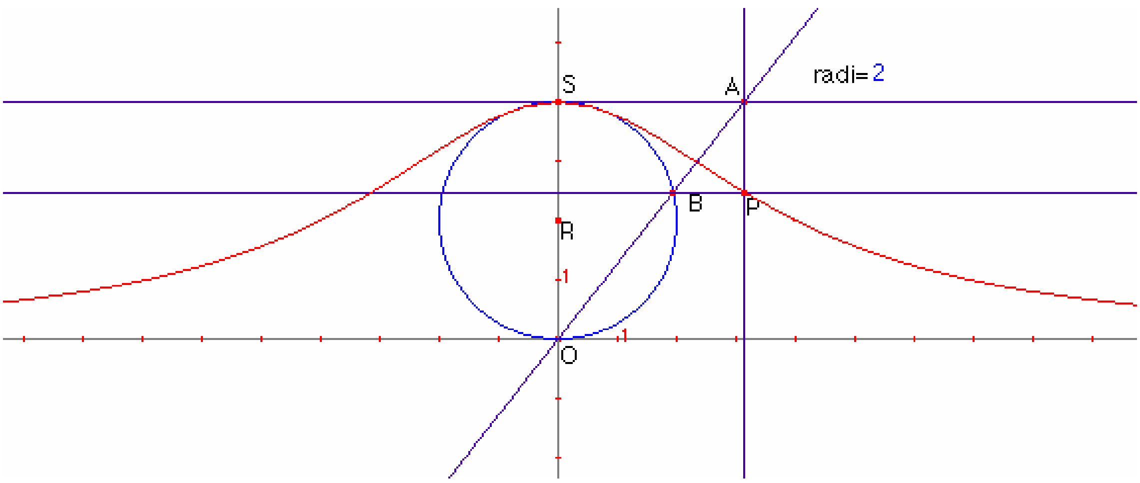
Activitat 26: Construcció d'algunes Corbes a partir de definicions geomètriques:

Corba d'Agnesi

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=2) tangent a l'eix OX en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'ordenades).
   Definiu el valor del radi r=2.
   Transferiu el valor r a l'eix d'ordenades. Anomeneu el punt R.
   Dibuixeu la circumferència C_1 de centre R que passa pel punt O.
c) Construïu la recta s d'equació y=2r
   Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix d'ordenades. Anomeneu el punt S.
   Dibuixeu la recta s paral·lela a l'eix d'abscisses que passa pel punt S.
d) Dibuixeu un punt A sobre la recta s.
e) Dibuixeu la recta v que passa pels punts O, A.
f) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1. Anomeneu el punt B.
g) Dibuixeu la recta t perpendicular a l'eix OX que passa pel punt A.
h) Dibuixeu la recta m perpendicular a l'eix OY que passa pel punt B.
i) Feu la intersecció de les rectes t, m. Anomeneu el punt P.
j) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar A sobre la recta s.

Aquesta corba anomenada d'*Agnesi* en homenatge a la matemàtica italiana Maria Agnesi (1718-1799) que la va citar en el seu llibre publicat en 1748, amb el nom de *versiera*.
L'equació cartesiana de la *corba d'Agnesi* és:

$$y=\frac{8r^3}{4r^2+x^2}$$

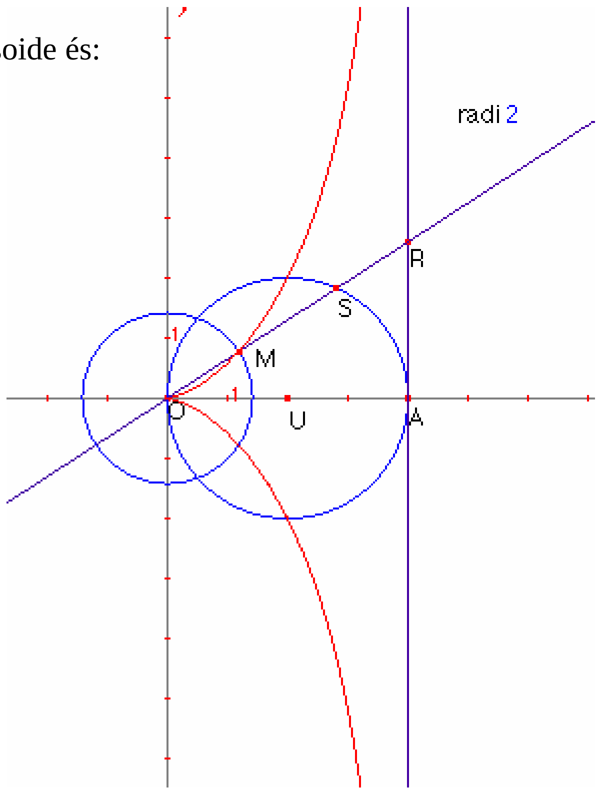


La cissoide de Diocles

a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=2) tangent a l'eix OY en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'abscisses (r,0)).
   Definiu el valor del radi r=2.
   Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt U.
   Dibuixeu la circumferència C_1 de centre U que passa pel punt O.
c) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix OX. Anomeneu el punt A(2r,0).
d) Dibuixeu la recta r perpendicular a l'eix OX que passa pel punt A.
e) Dibuixeu un punt R sobre la recta r.
f) Dibuixeu la recta s que passa pels punts O, R.
g) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1. Anomeneu el punt S.
h) Obteniu el punt M del segment $\overline{OS}$ tal que $\overline{OM} = \overline{RS}$
   Dibuixeu la circumferència C_2 de centre O i radi $\overline{RS}$.
   Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu el punt M.
i) Dibuixeu el lloc geomètric del punt M al variar R sobre la recta r.

Aquesta corba s'anomena *cissoide de Diocles*.
La *cissoide* va ser utilitzada al segle II AC per Diocles per a resoldre el problema de duplicar el cub.

L'equació cartesiana de la cissoide és:
$(x^2 + y^2) \cdot x = 2r \cdot y^2$
L'equació en forma polar és:
$$\rho = \frac{2r(\sin\theta)^2}{\cos\theta}$$



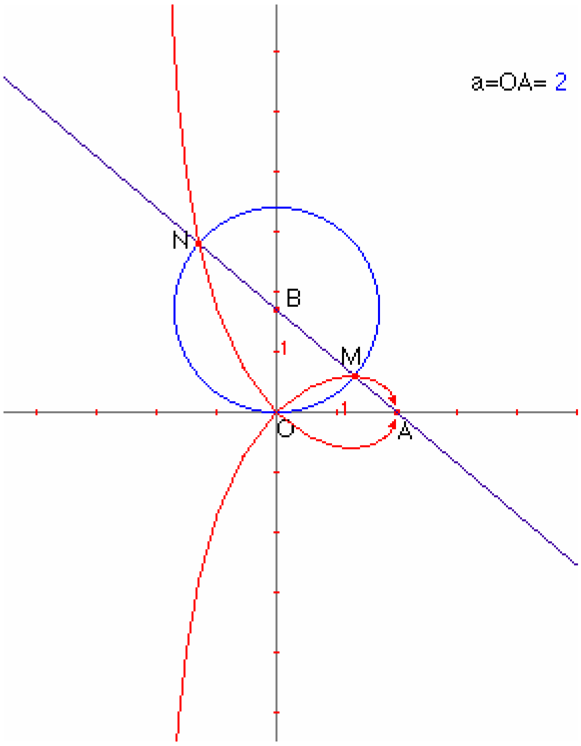
L'esferoide

a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Definiu el valor *a*=2.
c) Transferiu el valor *a* a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt A.
d) Dibuixeu un punt B sobre l'eix OY.
e) Determineu el punt M, N de la recta que passa pels punts A, B, tal que $\overline{BM} = \overline{OB}$ i $\overline{BN} = \overline{OB}$.
Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B que passa pel punt O.
Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, B.
Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1. Anomeneu els punts M, N.
f) Dibuixeu el lloc geomètrics dels punts M, N, respectivament, al variar B sobre l'eix OY.

Aquesta corba s'anomena *esferoide*.
La referència més antiga que es té sobre la corba es troba en dues cartes de Torricelli 1635. Va ser estudiada per Moivre en 1715 i per Agnesi en 1748.

L'equació cartesiana de l'*esferoide* és:
$x^3 + xy^2 + ay^2 - ax^2 = 0$

L'equació en forma polar és:
$\rho = \frac{a \cdot \cos(2\theta)}{\cos\theta}$



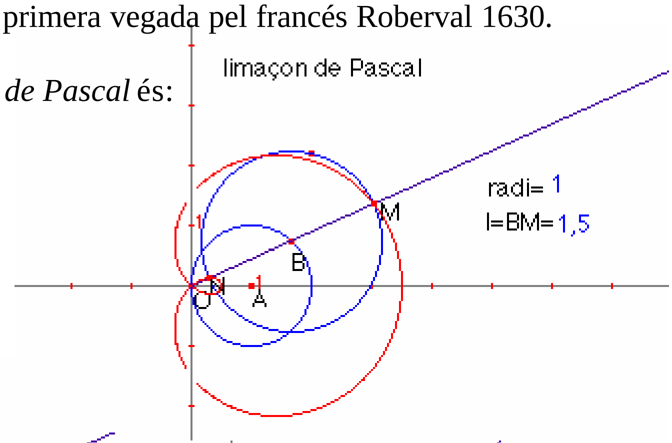
La limaçon (caragol) de Pascal
La cardioide

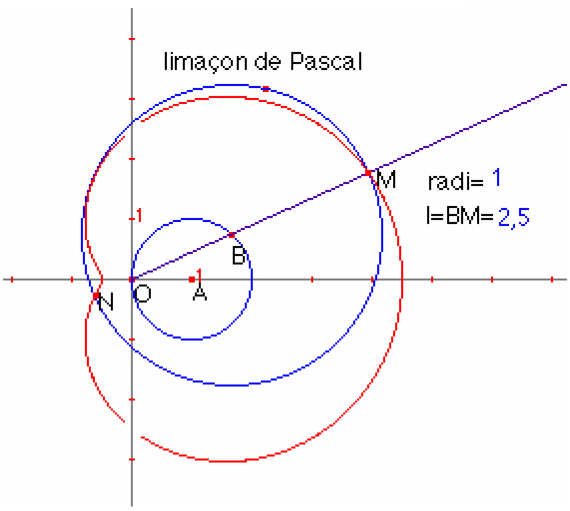
a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=1) tangent a l'eix OY en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'abscisses A(r,0)).
   Definiu el valor del radi r=1.
   Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt A.
   Dibuixeu la circumferència C_1 de centre U que passa pel punt O.
c) Dibuixeu un punt B sobre la circumferència C_1.
d) Definiu el valor $l = \overline{BM}$ (per exemple l=1.5).
e) Transferiu el valor l al punt B.
f) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi l.
g) Dibuixeu la semirecta r d'origen O que passa pel punt B.
h) Feu la intersecció de la semirecta r i la circumferència C_2. Anomeneu el punt M (el més allunyat de O).
i) Siga el punt N simètric del punt M respecte de B.
j) Dibuixeu el lloc geomètrics dels punts M, N, respectivament, al variar B sobre la circumferència C_1.

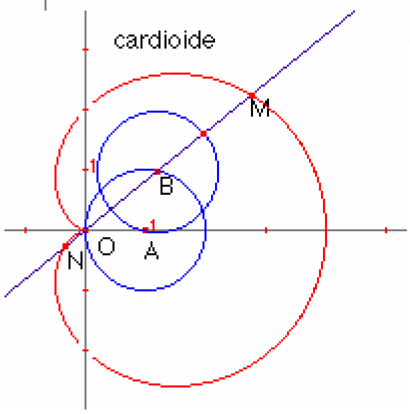
Aquesta corba s'anomena *limaçon (caragol) de Pascal*.
En el cas que $\overline{BM} = \overline{BN} = 2r$ la corba s'anomena *cardioide*.

Aquesta corba va ser estudiada per primera vegada pel francés Roberval 1630.

L'equació cartesiana de la *limaçon de Pascal* és:
$$\left(x^2 + y^2 - rx\right)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$
L'equació en forma polar és:
$$\rho = r\cos\theta + l$$





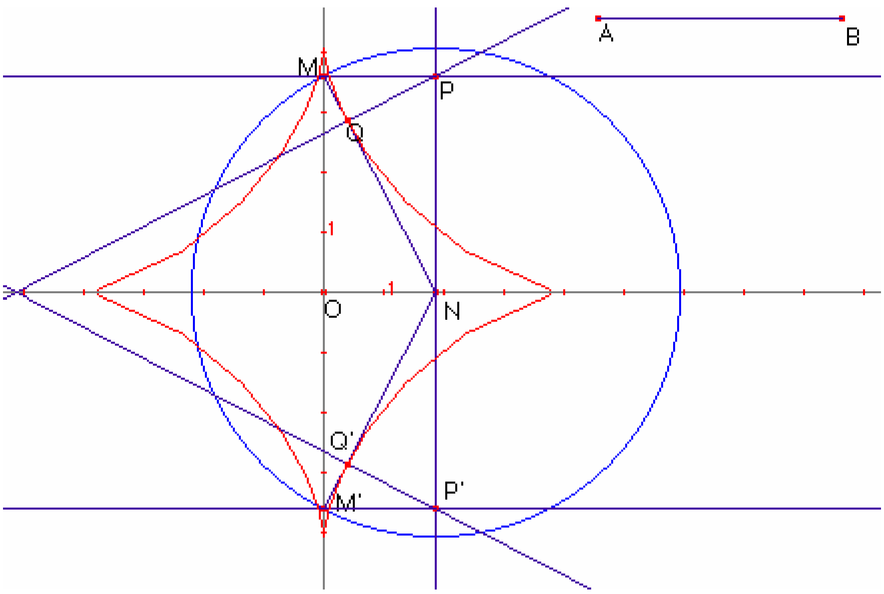


L'astroide

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Dibuixeu un segment $\overline{AB}$.
c) Dibuixeu un punt N sobre l'eix OX.
d) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre N i radi $\overline{AB}$.
e) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix OY. Anomeneu els punt M, M'.
f) Dibuixeu la recta r perpendicular a l'eix OY que passa pel punt M.
g) Dibuixeu la recta s perpendicular a l'eix OX que passa pel punt N.
h) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt P.
i) Dibuixeu el segment $\overline{MN}$.
j) Dibuixeu la recta t perpendicular al segment $\overline{MN}$ que passa pel punt P.
k) Feu la intersecció de la recta t i el segment $\overline{MN}$. Anomeneu el punt Q.
l) Anàlogament determineu el punt Q', partint del punt M'.
m) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts Q, Q', respectivament, al variar N sobre l'eix OX.

Aquesta corba s'anomena *astroide*.

L'equació cartesiana de l'astroide és:
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ on $a = \overline{AB} = \overline{MN}$.



Lemniscata de Bernoulli

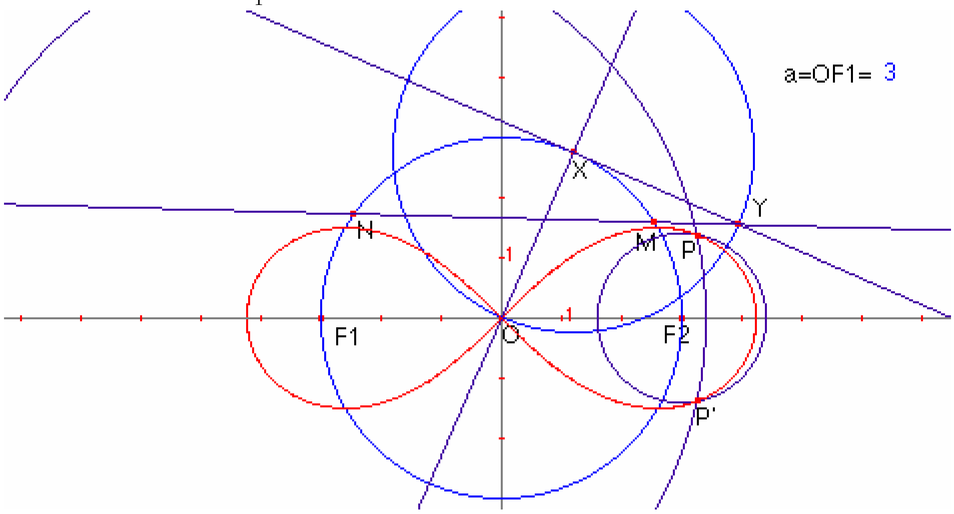
Donats els punts $F_1(-a,0)$ $F_2(a,0)$ on $a>0$, el lloc geomètric dels punts del plànol que el producte de les distàncies a F_1, F_2 són iguals a a^2 s'anomena *lemniscata de Bernoulli.* Donada a conéixer per Jacques Bernoulli en 1694. Les propietats d'aquesta corba foren estudiades per G. Fagnano (1682-1766) i per Euler.

L'equació cartesiana de la *lemniscata de Bernoulli* és: $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$

L'equació en forma polar és: $\rho^2=a^2\cos(2\theta)$

Construcció amb Cabri: Utilitzarem la propietat de la potència d'un punt respecte d'una circumferència.

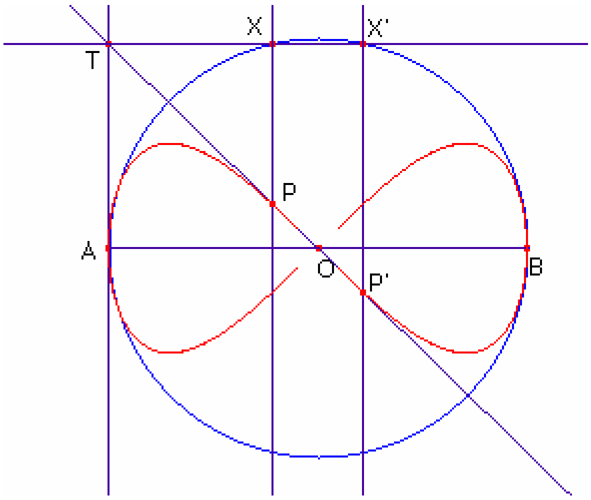
a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Definiu el valor a (per exemple a=3).
c) Traslladeu el valor a sobre l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt F_2.
d) Dibuixeu el punt F_1 simètric del punt F_2 respecte del punt O.
e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt F_2.
f) Dibuixeu un punt X sobre la circumferència C_1.
g) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, X.
h) Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta r que passa pel punt X.
i) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre X i radi a: Opció compàs.
j) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu el punt Y. Noteu que la potència del punt Y sobre la circumferència és a^2.
k) Dibuixeu un punt N de la circumferència C_1.
l) Dibuixeu la recta m que passa pels punts Y, N.
m) Feu la intersecció de la recta m i la circumferència C_1. Anomeneu el punt M. Noteu que $\overline{YM}\cdot\overline{YN}=a^2$.
n) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre F_1 i radi $\overline{YM}$.
o) Dibuixeu la circumferència D_2 de centre F_2 i radi $\overline{YN}$.
p) Feu la intersecció de les circumferència D_1, D_2. Anomeneu els punts P, P'.
q) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar el punt N sobre la circumferència C_1.



Lemniscata de Geromo

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.
b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.
c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.
d) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt A.
e) Dibuixeu un punt T sobre la recta r.
f) Dibuixeu la recta t que passa pels punts O, T.
g) Dibuixeu la recta m perpendicular a la recta r que passa pel punt T.
h) Feu la intersecció de la recta m i la circumferència C_1. Anomeneu els punts X, Y.
i) Dibuixeu la recta n perpendicular a la recta m que passa pel punt X.
j) Feu la intersecció de les rectes n, t. Anomeneu el punt P.
k) Dibuixeu la recta n' perpendicular a la recta m que passa pel punt X'.
l) Feu la intersecció de les rectes n', t. Anomeneu el punt P'.
m) Dibuixeu el lloc geomètric dels punt P, P', respectivament, al variar T sobre la recta r.

Aquesta corba s'anomena *lemniscata de Geromo*.

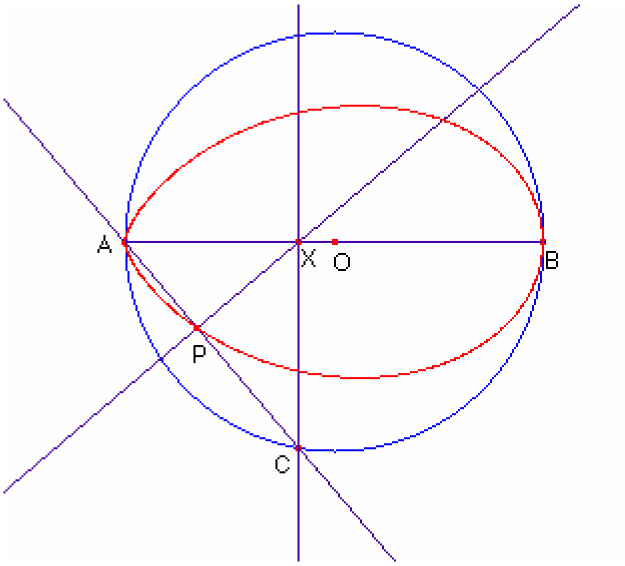


El foli

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.
b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.
c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.
n) Dibuixeu un punt C sobre la circumferència C_1.
o) Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, C.
p) Dibuixeu la recta m perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt C.
q) Feu la intersecció de la recta m i el segment $\overline{AB}$. Anomeneu el punt X.
r) Dibuixeu la recta n perpendicular a la recta r que passa pel punt X.
s) Feu la intersecció de les rectes r, n. Anomeneu el punt P.
t) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar C sobre la circumferència C_1.

Aquesta corba s'anomena *foli.*

L'equació cartesiana del foli és: $\left(x^2+y^2\right)^2=4r^2x^2$ on $r=\dfrac{\overline{AB}}{2}$ A(0,0)

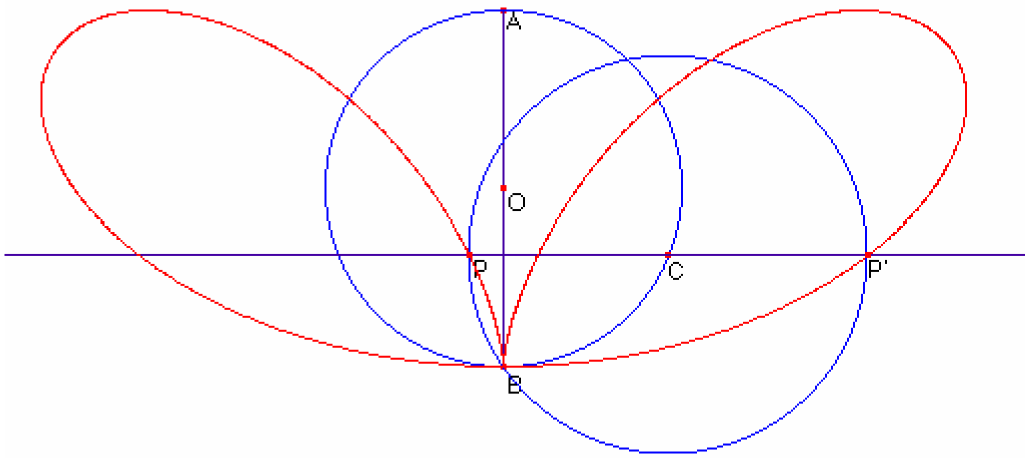


El foli simètric

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.
b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.
c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.
d) Dibuixeu un punt C sobre la circumferència C_1.
e) Dibuixeu la circumferència de centre C que passa pel punt B.
f) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt C.
g) Feu la intersecció de la circumferència C_2 i la recta r. Anomeneu els punts P, P'.
h) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar C sobre la circumferència C_1.

Aquesta corba s'anomena *foli simètric*.

L'equació cartesiana del foli simètric és: $\left(x^2+y^2\right)^2+4rx^2y=0$ on $r=\overline{AB}$. B(0,0).

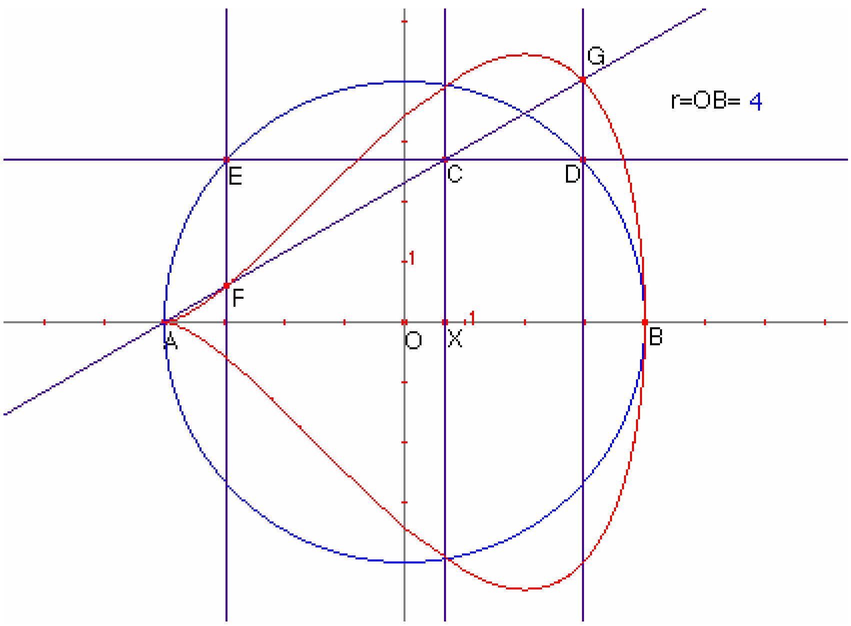


Quàrtica piriforme.

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.
b) Definiu el valor r del radi (per exemple r=4).
c) Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt B.
d) Dibuixeu el punt simètric A del punt B respecte de l'origen O.
e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt B.
f) Dibuixeu un punt X sobre l'eix OX.
g) Dibuixeu la recta d perpendicular a l'eix OX que passa pel punt X. Recta directriu de la corba.
h) Dibuixeu un punt C sobre la recta d.
i) Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, C.
j) Dibuixeu la recta s paral·lela a l'eix OX que passa pel punt C.
k) Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1. Anomeneu els punts D, E.
l) Dibuixeu la recta m perpendicular a l'eix OX que passa pel punt D.
m) Feu la intersecció de les rectes m, r. Anomeneu el punt G.
n) Dibuixeu la recta n perpendicular a l'eix OX que passa pel punt E.
o) Feu la intersecció de les rectes n, r. Anomeneu el punt F.
p) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts F, G, respectivament, al variar C sobre la recta d.

Aquesta corba s'anomena *quàrtica piriforme.*

L'equació cartesiana de la *quàrtica piriforme* és:
$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0 \quad \text{on} \quad a = \overline{OB}, \quad b = d(O,X)$.

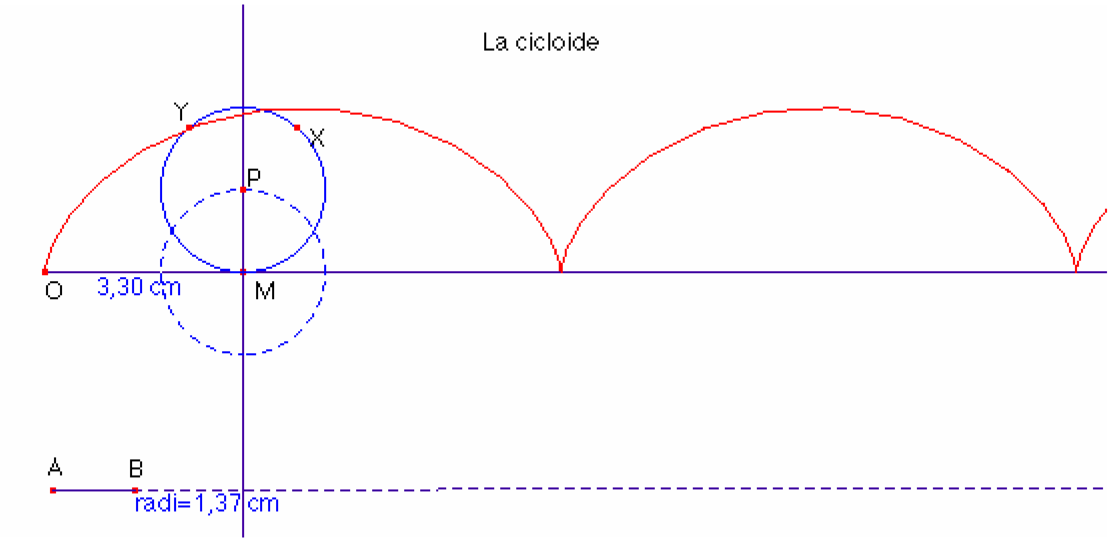


La cicloide

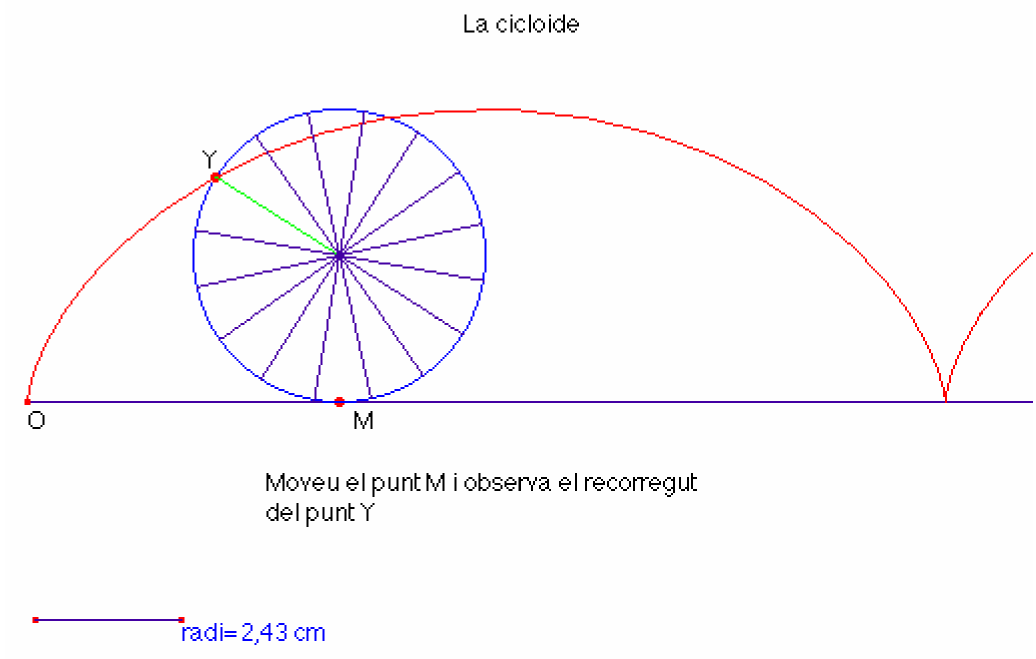
La *cicloide* és la corba definida pel lloc geomètric de les posicions d'un punt fix d'una circumferència que roda sense relliscar sobre una recta. La recta s'anomena directriu i la circumferència s'anomena ruleta o generatriu.

Els passos de construcció són els següents:

a) Dibuixeu la semirecta d d'origen O (directriu).
b) Dibuixeu un punt M sobre la semirecta d.
c) Calculeu la distància $\overline{OM}$.
d) Dibuixeu la semirecta r d'origen A.
e) Dibuixeu un punt B sobre la semirecta r.
f) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$ (radi de la ruleta) i calculeu la seua mesura.
g) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre M i radi $\overline{AB}$.
h) Dibuixeu la recta m perpendicular al la semirecta d que passa pel punt M.
i) Feu la intersecció de la circumferència D_1 i la recta m. Anomeneu el punt P.
j) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre P i radi $\overline{AB}$ (ruleta).
k) Transferiu a la circumferència C_1 des del punt M el valor $\overline{OM}$. Anomeneu el punt X.
l) Dibuixeu el punt Y simètric del punt X respecte de la recta m.
m) Feu el lloc geomètric del punt Y al variar M sobre la semirecta d.



Ocultant els objectes i creant segments radis de la ruleta queda la següent figura:



Siga la semirecta d'origen P que passa pel punt Y.

Si considerem el punt R interior a la circumferència C_1. El lloc geomètric del punt R al variar M sobre la semirecta d s'anomena cicloide acurtada.

Si considerem el punt S exterior a la circumferència C_1. El lloc geomètric del punt S al variar M sobre la semirecta d s'anomena cicloide allargada.