Sessió 8. Cul de sac.

Activitat 35. (activ35a.fig, activ35b.fig).
Potència d'un punt respecte d'una circumferència.

Activitat 36. (activ36.fig).
Inversió d'un punt respecte d'una circumferència.

Activitat 37. (activ37a.fig, activ37b.fig).
La circumferència d'Euler.

Activitat 38. (activ38a.fig, activ38.b).
Teorema de Viviani.

Activitat 39. (activ39.fig).
Punt Miquel.

Activitat 40.
Animacions:

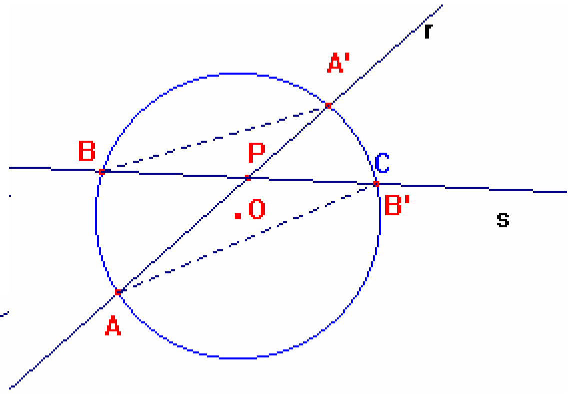
El pèndol. (activ40a.fig).
Moviments dels planetes (activ40b.fig).
El gat mecànic (activ40c.fig).
Dues corrioles (activ40d.fig).

Activitat 41.
Fractals:

La fractal de Koch (borralló de neu). (activ41a*.fig).
El triangle de Sierpinski. (activ41b*.fig).
El quadrat de Sierpinski. (activ41c*.fig).

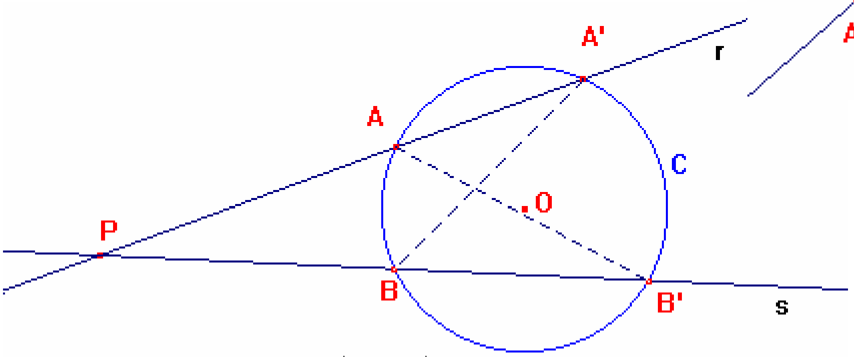
Activitat 35.- Potència d'un punt respecte d'una circumferència.

Siga la circumferència C de centre O. Siga P un punt qualsevol del plànol.
Siga la recta r que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts A, A'.
Siga la recta s que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts B, B'.



Aleshores: $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=k$, a aquesta constant s'anomena potència del punt P respecte de la circumferència C

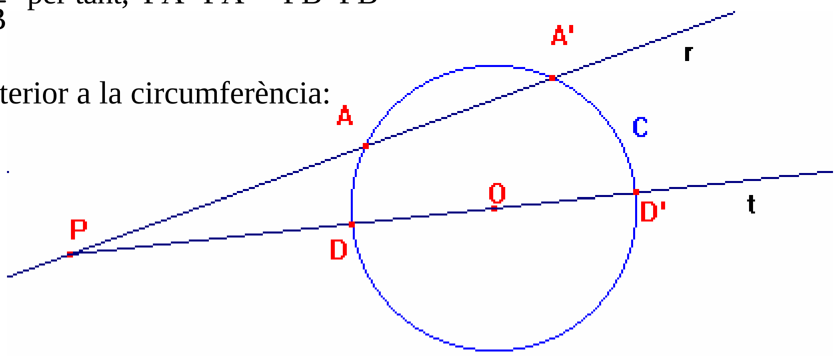
Si P és exterior a la circumferència C tenim que:
$k=d^2-r^2$, on $d=\overline{PO}$, $r=$ radi de la circumferència.



Noteu que els triangles $\overset{\Delta}{PAB'}$, $\overset{\Delta}{PBA'}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$$ per tant, $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}$

Si P és exterior a la circumferència:



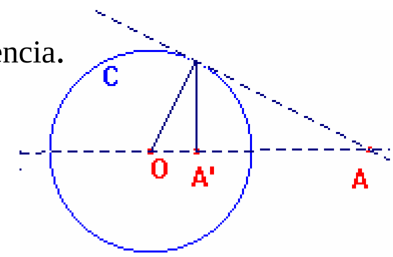
Considerem la semirecta t que passa pels punts P, O, que talla la circumferència C en els punts D, D'. Per la propietat anterior:

$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PD}\cdot\overline{PD'}$. Siguen $\overline{PO}=d$, $\overline{OD}=r$

$\overline{PD}\cdot\overline{PD'}=\left(\overline{PO}-\overline{OD}\right)\left(\overline{PO}+\overline{OD'}\right)=(d-r)(d+r)=d^2-r^2$,

Aleshores, $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=d^2-r^2$

Activitat 36.-Inversió d'un punt respecte d'una circumferència.



Donada la circumferència C de centre O i un punt A del plànol anomenem inversió del punt A respecte de la circumferència C al punt A' de la recta que passa per O, A tal que $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$, on r és el radi de la circumferència.

Activitat 37.- Circumferència d'Euler.

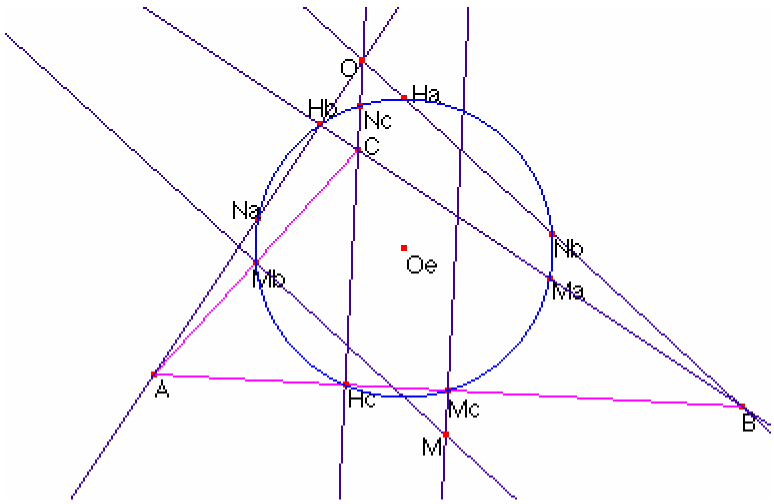
En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ el punt mig O_e del segment format per l'ortocentre i el circumcentre és el centre de la circumferència d'Euler i el radi és la meitat de la circumferència circumscrita al triangle.

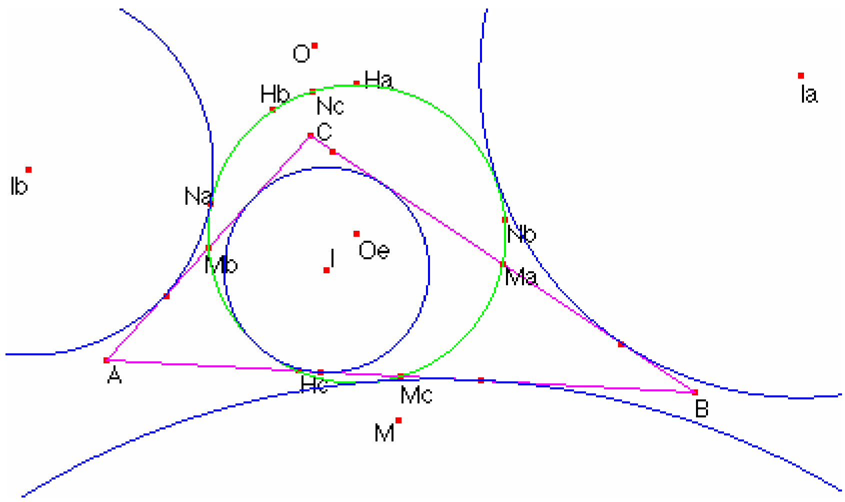
Aquesta circumferència és tangent a les circumferències inscrita i exinscrites al triangle i a més a més conté els 9 punts següents:

H_a, H_b, H_c, els tres peus de les altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

M_a, M_b, M_c, els tres punts mig dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

N_a, N_b, N_c, els tres punts mig dels segments compresos entre els vèrtex i l'ortocentre.





Procediment de dibuix de la circumferència d'Euler.

a) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
b) Dibuixeu els punts mig dels costats M_a, M_b, M_c.
c) Dibuixeu les mediatrius als costats a, b respectivament. Feu la intersecció anomeneu el punt M (circumcentre del triangle).
d) Dibuixeu les rectes r, s, t que contenen els costats dels triangles a, b, c. respectivament.
e) Dibuixeu les rectes altures als costats a, b, c, respectivament.
f) Dibuixeu els punts H_a, H_b, H_c, peus de les altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (intersecció de les rectes altures i les rectes r, s, t).
g) Dibuixeu el punt O ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (intersecció de dues rectes altura).
h) Dibuixeu el punt mig O_e del segment $\overline{OM}$ (centre de la circumferència de Euler).

Dibuixeu els punts N_a, N_b, N_c, punts mig dels segments compresos entre els vèrtex i l'ortocentre.

i) Dibuixeu la circumferència d'Euler de centre O_e que passa pel punt M_a.
j) Comproveu que els 9 punts pertanyen a la circumferència.
k) Calculeu el radi $\overline{O_eM_a}$ de la circumferència d'Euler.
l) Calculeu el radi $\overline{MB}$ de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
m) Comproveu que $\overline{MB} = 2\overline{O_eM_a}$.

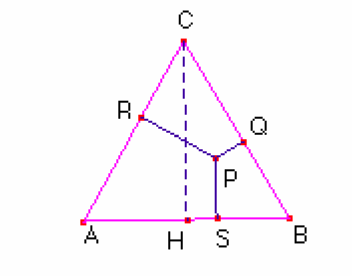
a) Dibuixeu la circumferència inscrita al triangle.
   Dibuixeu la recta m bisectriu al vèrtex A.
   Dibuixeu la recta n bisectriu al vèrtex B.
   Feu la intersecció de les rectes m, n. Anomeneu el punt I (incentre).
   Dibuixeu la recta u perpendicular al costat a que passa pel punt I.
   Feu la intersecció de la recta u i el costat a. Anomeneu el punt U.
   Dibuixeu la circumferència de centre I que passa per U. (inscrita al triangle)
b) Dibuixeu les 3 circumferències exinscrites al triangle.
   Dibuixeu la recta p perpendicular a la recta m que passa pel punt A.
   Dibuixeu la recta q perpendicular a la recta n que passa pel punt B.
   Feu la intersecció de les rectes p, q.. Anomeneu el punt I_c. (centre de la circumferència exinscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
   Dibuixeu la recta v perpendicular al costat c que passa pel punt I_c.
   Feu la intersecció de la recta v i el costat c. Anomeneu el punt V.
   Dibuixeu la circumferència de centre I_c que passa per V. (exinscrita al triangle)

   Anàlogament les altres.
c) Comproveu que la circumferència d'Euler és tangent a les 4 circumferències (inscrita i exinscrites al triangle).

Activitat 38.- Teorema de Vicenzo Viviani (1622-1703)

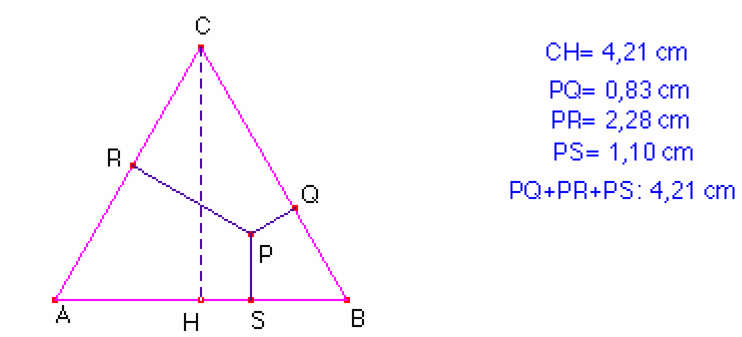
En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ la suma de les perpendiculars d'un punt P interior al triangle (o del triangle) als costats és igual a l'altura del triangle.

Què passa amb els punts P exteriors al triangle?.

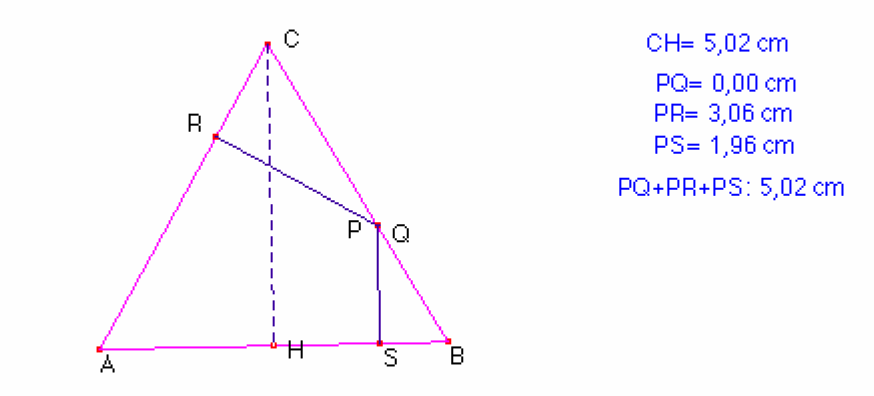


Construcció amb Cabri:

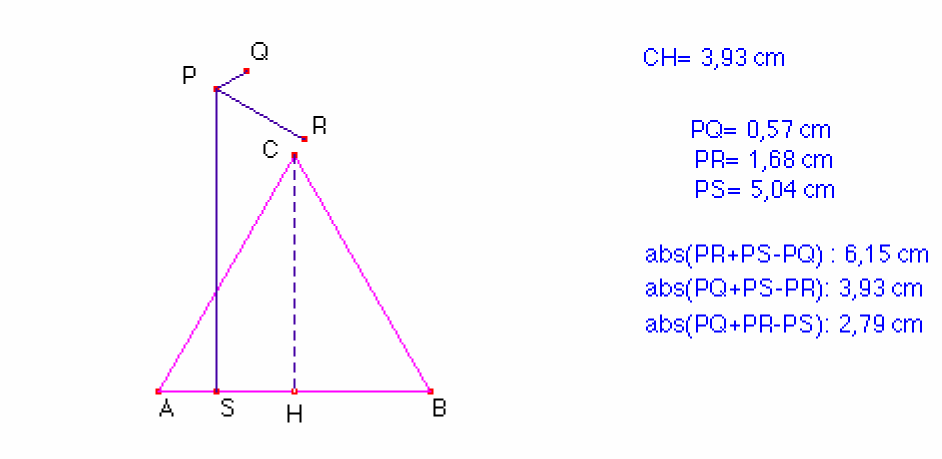
a) Dibuixeu el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
b) Dibuixeu la recta r perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per C.
c) Feu la intersecció de la recta r i el costat $\overline{AB}$. Anomeneu el punt H.
d) Dibuixeu el segment $\overline{CH}$ i calculeu la seua mesura.
e) Dibuixeu un punt P interior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
f) Dibuixeu la recta s perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt P.
g) Feu la intersecció de la recta s i el costat $\overline{AB}$. Anomeneu el punt S.
h) Dibuixeu la recta t perpendicular al costat $\overline{BC}$ que passa pel punt P.
i) Feu la intersecció de la recta r i el costat $\overline{BC}$. Anomeneu el punt Q.
j) Dibuixeu la recta m perpendicular al costat $\overline{AC}$ que passa pel punt P.
k) Feu la intersecció de la recta m i el costat $\overline{AC}$. Anomeneu el punt R.
l) Dibuixeu els segments $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}$ i calculeu la seua mesura.
m) Calculeu, amb ajut de la calculadora, $\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS}$.
n) Noteu que $\overline{CH} = \overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS}$.

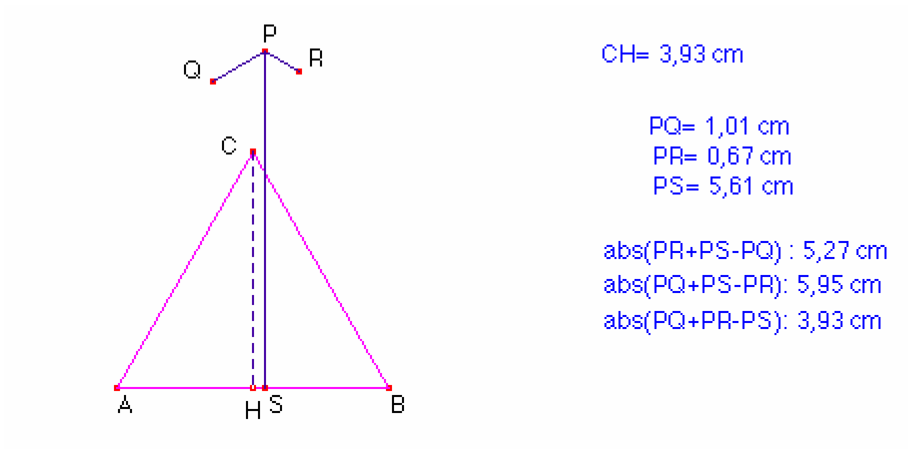


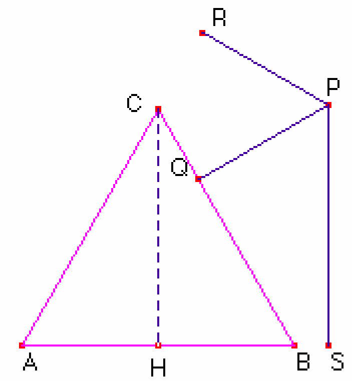
Si el punt P pertany al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es té el mateix resultat.



Si el punt P és exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, depén de la regió on es trobe es té el següent resultat:



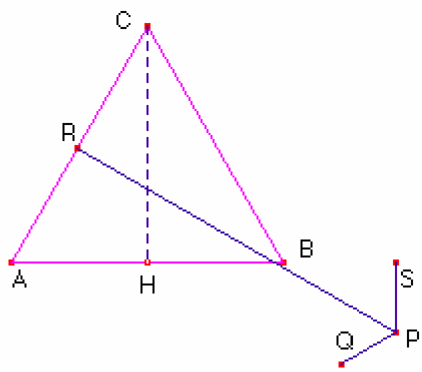




CH= 3,93 cm

PQ= 2,49 cm
PR= 2,41 cm
PS= 4,01 cm

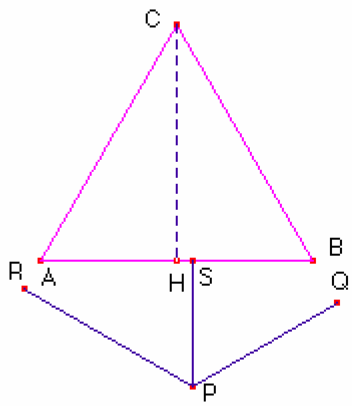
abs(PR+PS-PQ) : 3,93 cm
abs(PQ+PS-PR): 4,09 cm
abs(PQ+PR-PS): 0,89 cm



CH= 3,93 cm

PQ= 1,04 cm
PR= 6,12 cm
PS= 1,15 cm

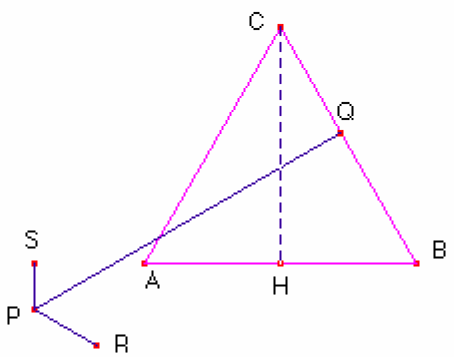
abs(PR+PS-PQ) : 6,24 cm
abs(PQ+PS-PR): 3,93 cm
abs(PQ+PR-PS): 6,01 cm



CH= 3,93 cm

PQ= 2,78 cm
PR= 3,24 cm
PS= 2,09 cm

abs(PR+PS-PQ) : 2,56 cm
abs(PQ+PS-PR): 1,62 cm
abs(PQ+PR-PS): 3,93 cm



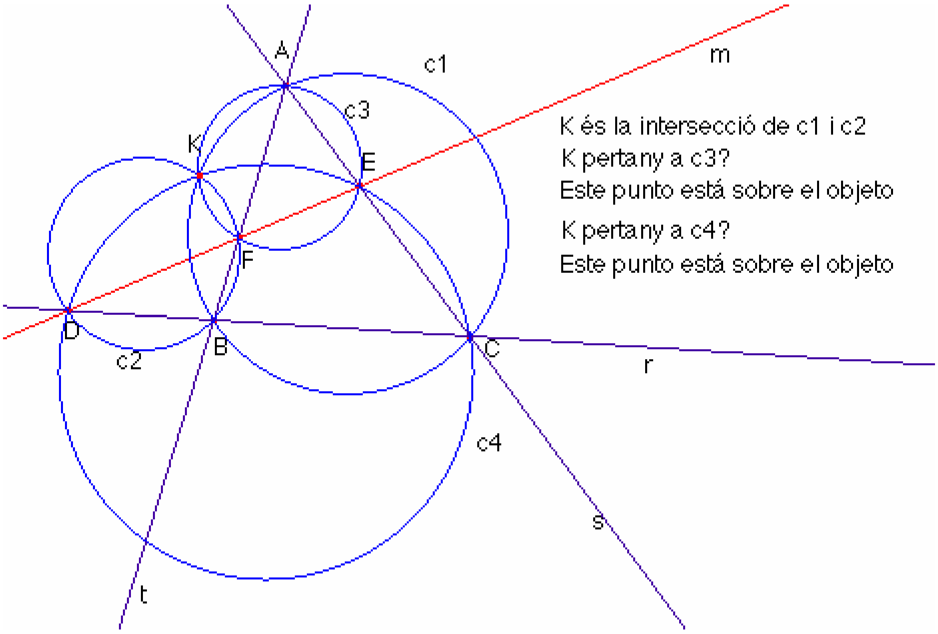
CH= 3,93 cm

PQ= 5,89 cm
PR= 1,20 cm
PS= 0,76 cm

abs(PR+PS-PQ) : 3,93 cm
abs(PQ+PS-PR): 5,45 cm
abs(PQ+PR-PS): 6,34 cm

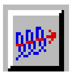
Activitat 39.- Punt Miquel

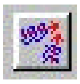
Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga la recta r que passa pels punts B, C.
Siga la recta s que passa pels punts A, C.
Siga la recta t que passa pels punts A, B.
Siga una recta m que talla les rectes r, s, t en els punts D, E, F, respectivament.
Considerem les circumferències C_1, C_2, C_3, C_4 circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBF}, \overset{\Delta}{AEF}, \overset{\Delta}{DCE}$ respectivament.
Aleshores, les circumferències C_1, C_2, C_3, C_4 concorren en el punt K (anomenat punt Miquel).

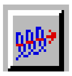


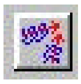
Activitat 40.- Animacions.

En el menú veure hi ha dues possibilitats: animació i animació múltiple.

 Ferramenta per a fer una animació.

 Ferramenta per a fer una animació múltiple.

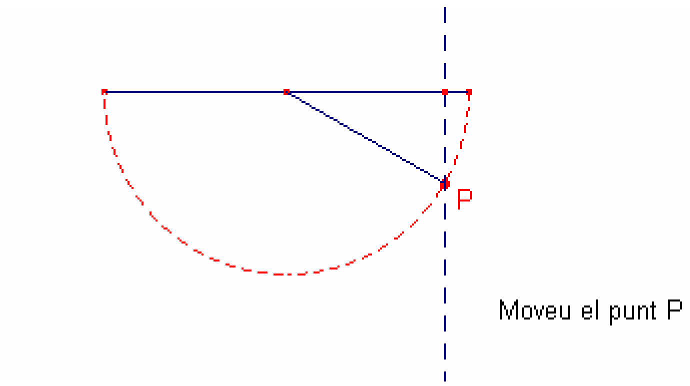
Per fer una animació cal escollir la icona  i a continuació escollir l'objecte que volem moure (arrossegant-lo amb el ratolí en direcció contrària a l'animació, apareixerà un moll) i tot seguit soltar. Petjant la tecla ESC es detén l'animació.

Per fer una animació múltiple cal escollir la icona  i a continuació escollir els objectes (arrossegant-los apareixerà un moll) tot seguit petjant la tecla INTRO i començarà tots els objectes escollits a moure's. Petjant una altra vegada la tecla ESC es detén l'animació.

Veurem 4 exemples d'animacions.
Els dos primers d'ells me'ls va proposar Vicente Badenes. Els altres dos l'autor és José Antonio Mora i es troben dins del seu excel·lent treball "La Geometría de los mecanismos con Cabri-géomètre".

El Pèndol. Moviment harmònic.

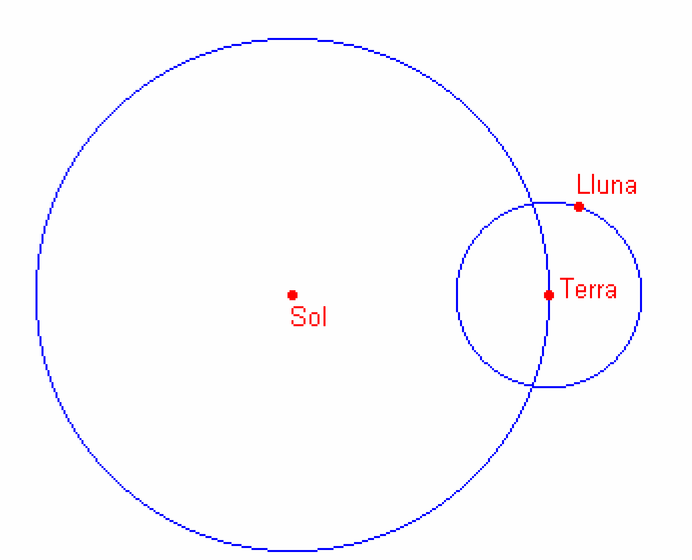
Obriu el fitxer activ40a.fig.



Feu una animació al punt P i observeu que succeeix a la seua projecció.

Moviment dels planetes.

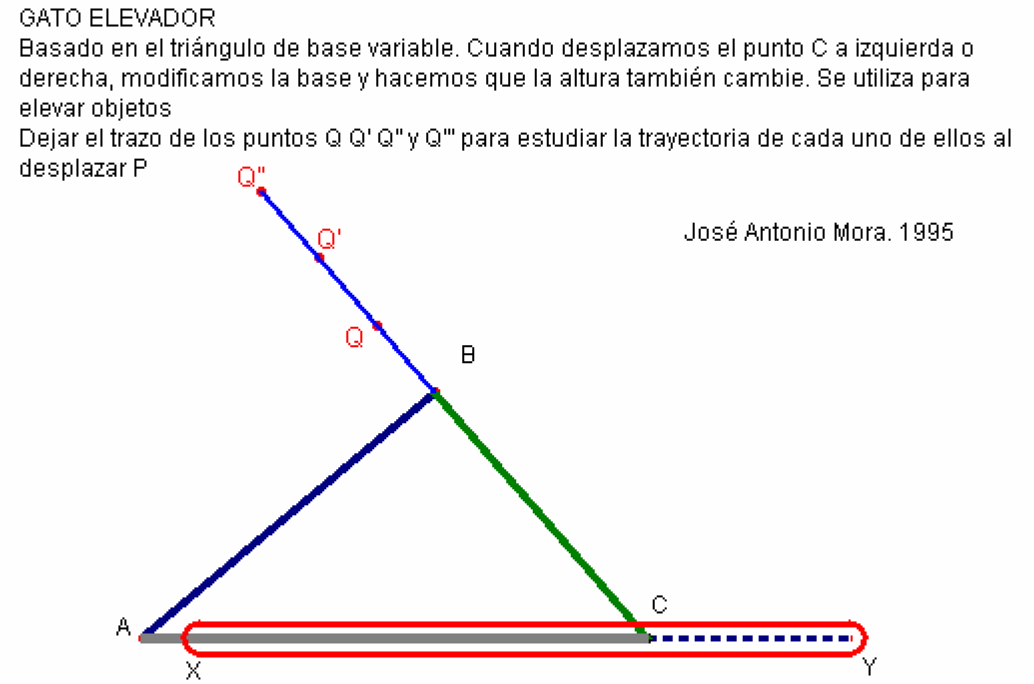
Obriu el fitxer activ40b.fig



Feu una animació múltiple de la Terra i la Lluna i observeu els eclipsis.

El gat mecànic.

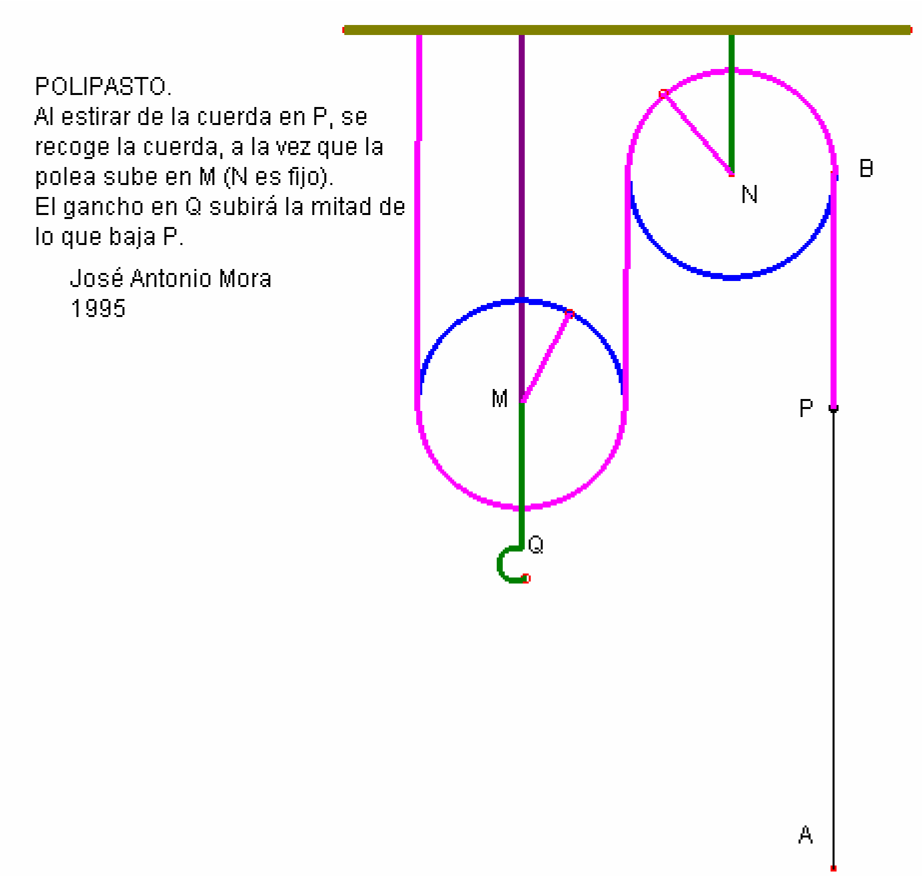
Obriu el fitxer activ40c.fig.



Feu una animació al punt C i observeu com es mouen els punts B, Q, Q', Q".

Dues corrioles.

Obriu el fitxer activ40d.fig.



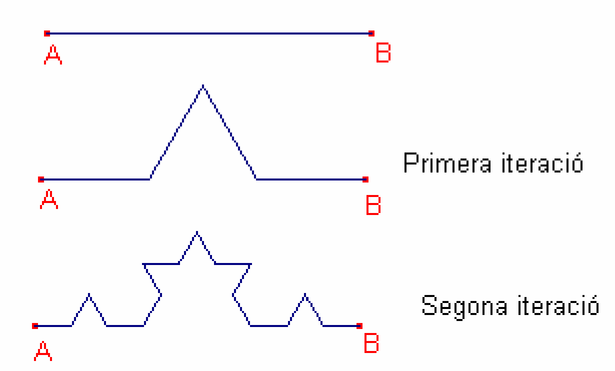
Feu una animació del punt P i observeu el moviment del punt Q.

Activitat 41. Fractals.

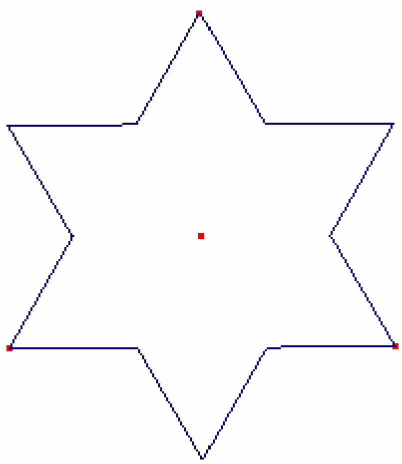
La corba de Koch està datada en 1904 i va ser creada per H. Von Koch (1870-1924). El procés de construcció és el següent:

i) S'inicia amb un segment de longitud 1. Es divideix el segment en tres parts iguals. La part central és reemplaçada per un triangle equilàter de costat $\frac{1}{3}$ al qual se li suprimeix la base.

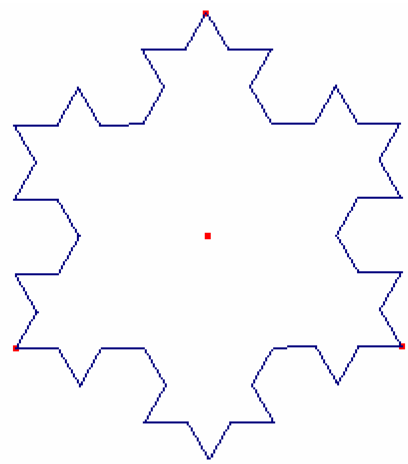
ii) Amb aquest pas hem obtingut 4 segments de longitud $\frac{1}{3}$. A cadascun dels quatre segments s'aplica el procés i). El procés es repeteix fins l'infinit.



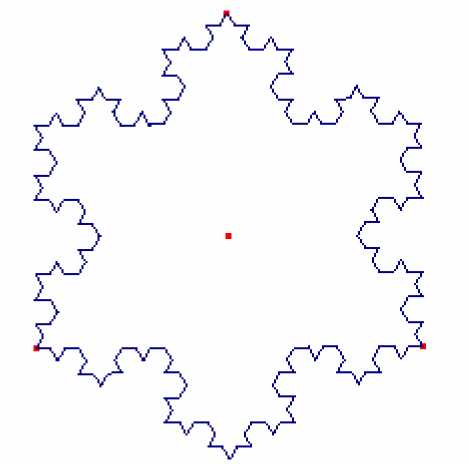
Si apliquen el procés anterior als costats d'un triangle equilàter la fractal que queda s'anomena **borralló de neu de Koch**.



Primera iteració



Segona iteració.

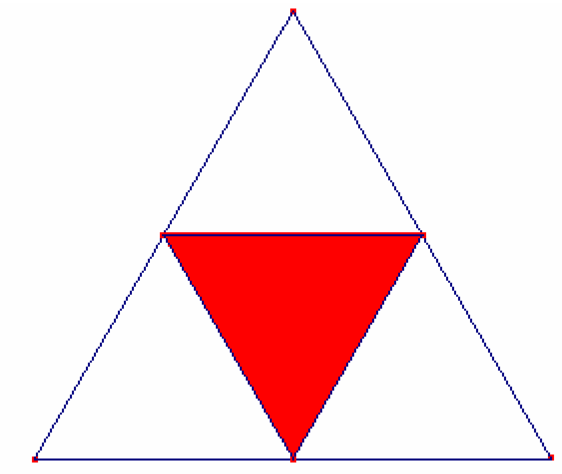


Tercera iteració

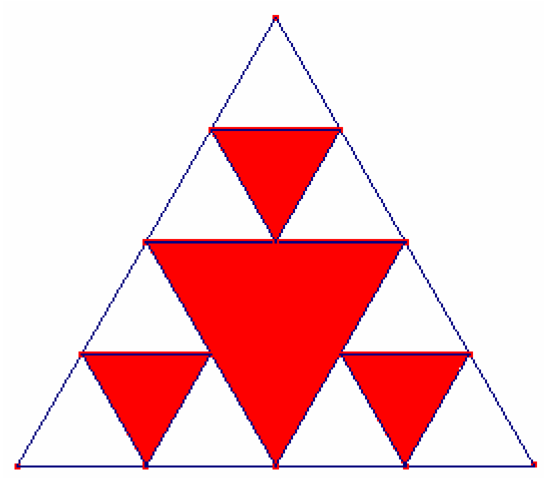
El triangle de Sierpinski (1882-1969) és una fractal que es construeix de la forma següent:

i) L'objecte inicial és un triangle equilàter. S'uneixen els punts migs de cada costat del triangle i s'extrau el triangle equilàter central de costat la meitat de l'inicial.

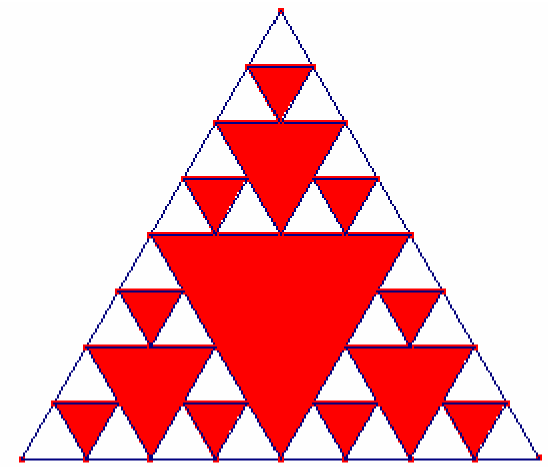
ii) Apliquem el procés als altres tres triangles equilàters i s'extrauen tres triangles. Seguim el procés fins l'infinit.



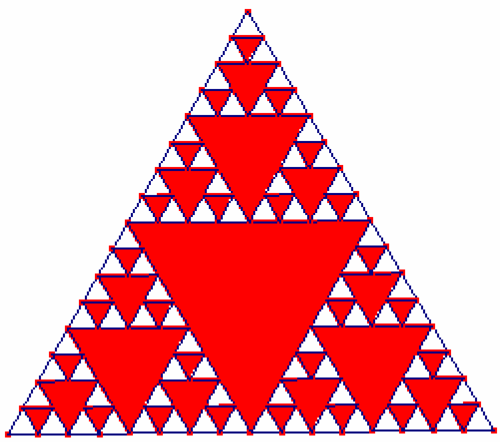
Primera iteració



Segona iteració



Tercera iteració

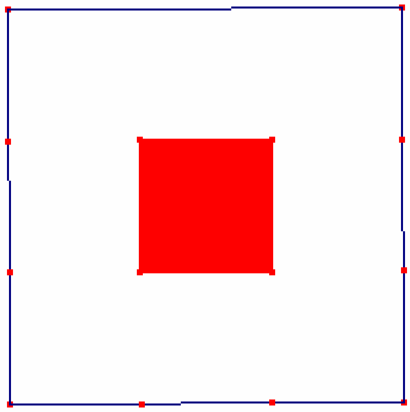


Quarta iteració

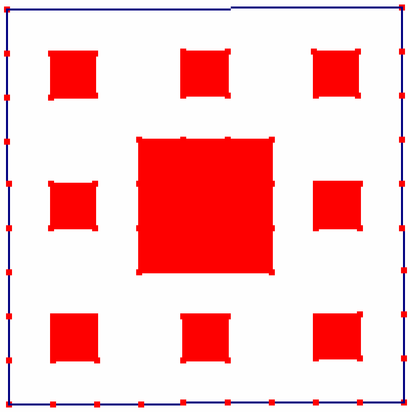
El quadrat de Sierpinski és una fractal que es construeix de la forma següent:

i) L'objecte inicial és un quadrat. Dividim els costats del quadrat en 3 parts iguals i formem 9 quadrats iguals s'extrau el quadrat central de costat $\frac{1}{3}$ de l'inicial.

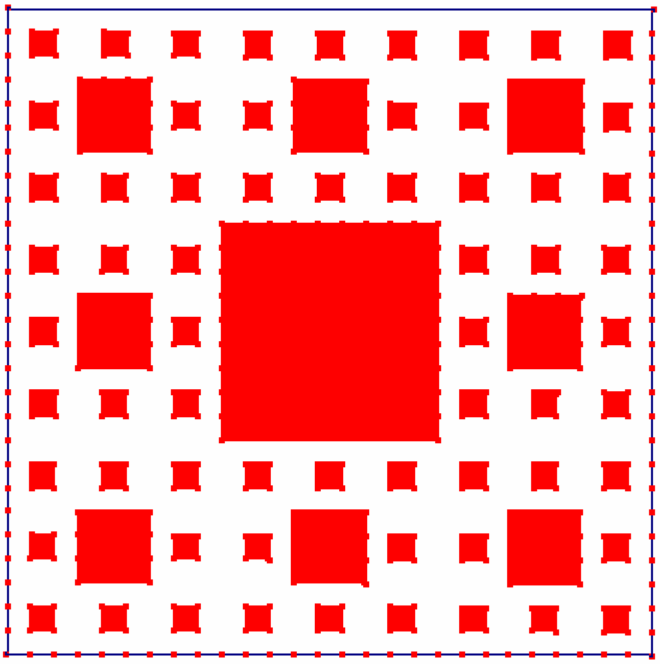
ii) Apliquem el procés als altres 8 quadrats i s'extrauen 8 quadrats. Seguim el procés fins l'infinit.



Primera iteració



Segona iteració



Tercera iteració (augmentada)