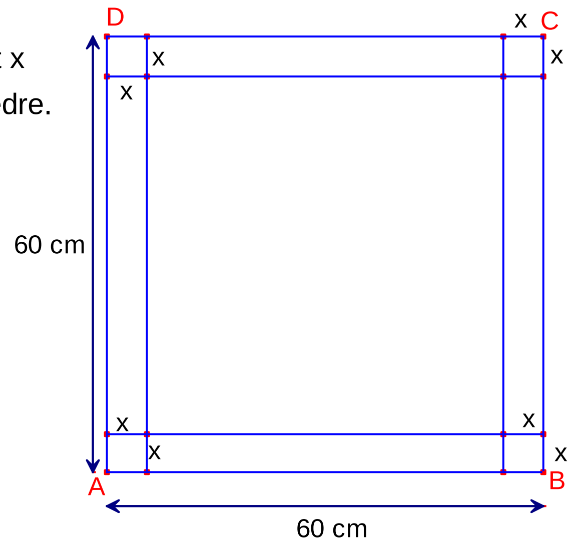
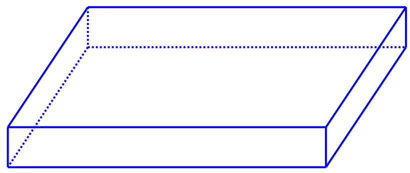
Funció volum d'un ortoedre.

En una cartolina quadrada ABCD, $\overline{AB} = 60$ cm, $\overline{AD} = 60$ cm, es retallem 4 quadradets iguals de costat x per tal de poder construir, plegant la cartolina, un ortoedre.



a) Si $x = 1$ quin és el volum de l'ortoedre?.
b) Determineu els valors que pot tenir x .
c) Ompliu la següent taula de valors.

x	V(x)
1	
2	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
x	$V(x) =$



d) Representeu la gràfica de la funció volum.
e) Observant la taula i la gràfica, determineu quin és el màxim volum de l'ortoedre?.
f) Quant ha de mesurar el costat x del quadrat que retallem a fi que el volum de l'ortoedre siga $10000\ cm^3$?.

Solució:

Si retallem un quadrat de costat $x = 1$, la base de l'ortoedre és un quadrat de costat 58 i altura x.

El volum és $V(1) = 58^2 \cdot 1 = 3364\ cm^3$.

Notem que els valors de x varien fins la meitat de la longitud del costat de la cartolina: $x \in [0, 30]$

Si retallem un quadrat de costat $x \in [0, 30]$, la base de l'ortoedre és un quadrat de costat $60 - 2x$ i altura x.

El volum és $V(x) = (60 - 2x)^2 x$.

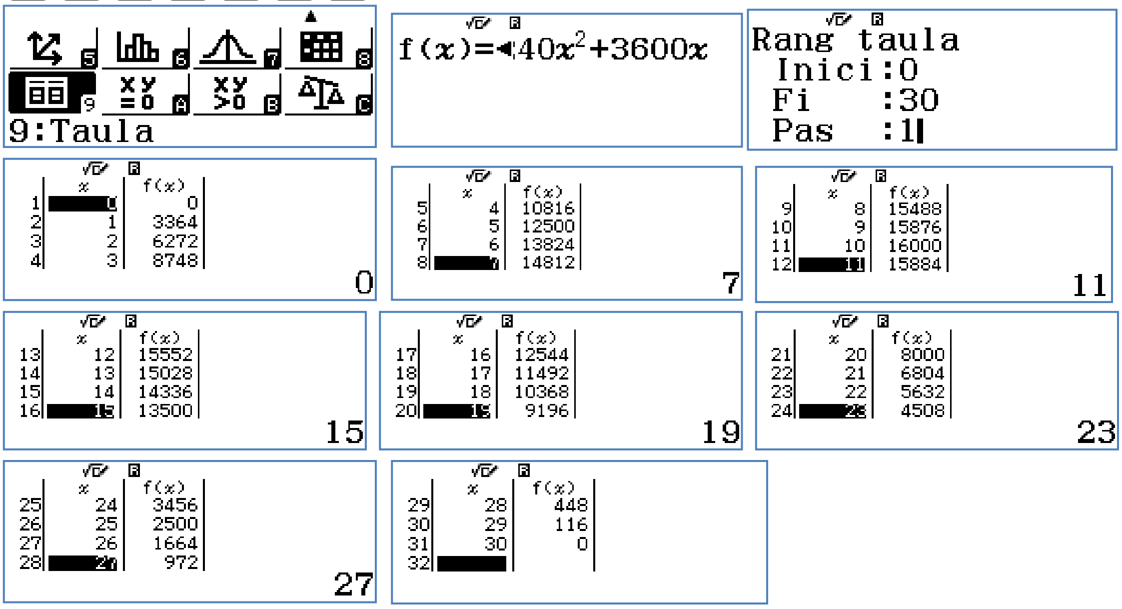
$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$, $x \in [0, 30]$.

Per construir la taula de la funció utilitzarem el menú Taula de la calculadora Casio 991 classwiz.

MENU 9

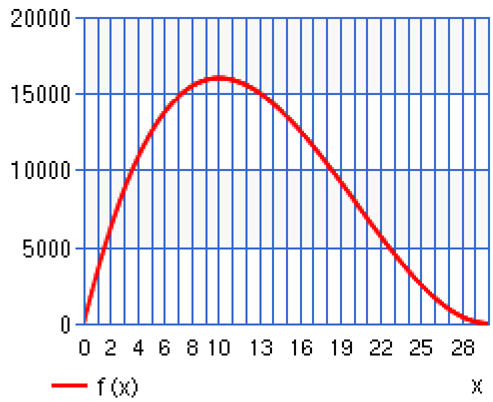
4 x $x^{■}$ 3 ▶ − 2 4 0 x x^2 + 3 6 0 0 x =

0 = 3 0 = 1 =



Per representar gràficament la funció utilitzarem la funció QR de la calculadora.

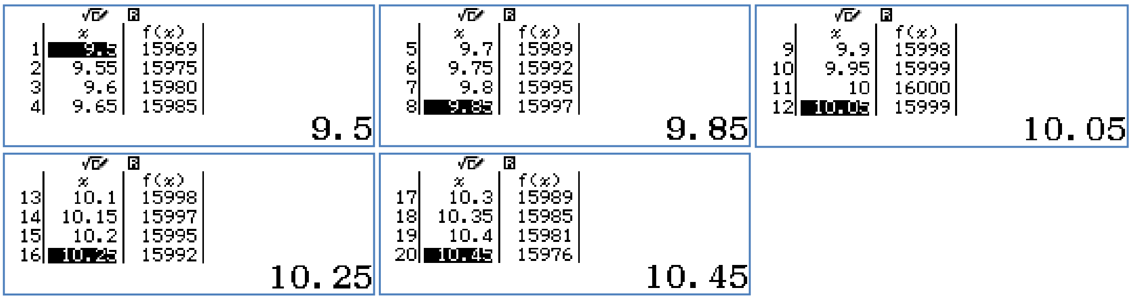
SHIFT OPTN



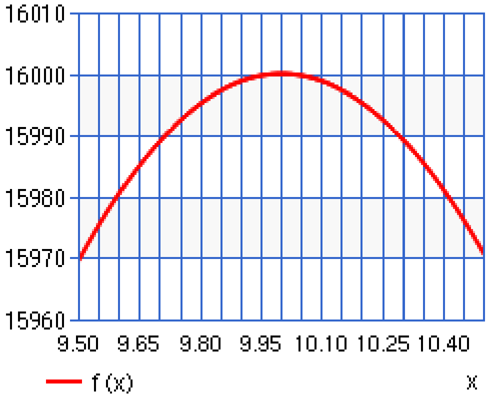
El màxim del volum de l'ortoedre s'assoleix quan $x = 10$ cm.

El volum màxim és $V(10) = 16000\ cm^3$.

Podríem fer un interval més menut al voltant de $x = 10$ cm:

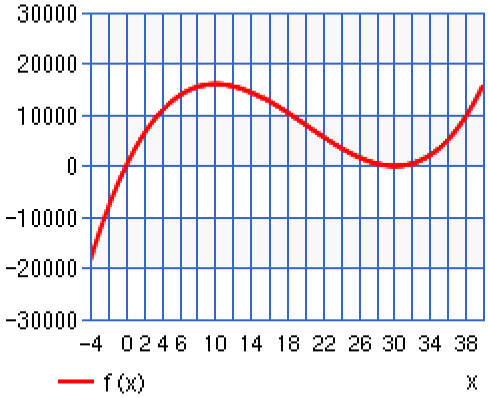


	x	f(x)
1	9.5	15969
2	9.55	15975
3	9.6	15980
4	9.65	15985
5	9.7	15989
6	9.75	15992
7	9.8	15995
8	9.85	15997
9	9.9	15998
10	9.95	15999
11	10	16000
12	10.05	15999
13	10.1	15998
14	10.15	15997
15	10.2	15995
16	10.25	15992
17	10.3	15989
18	10.35	15985
19	10.4	15981
20	10.45	15976



Notem que el volum màxim s'assoleix en $x = 10$ cm.

La gràfica de la funció $f(x) = (60 - 2x)^2 x$ quan $x \in R$.



Demostració:

$(60 - 2x)^2 x = 2(30 - x)(30 - x)2x$.

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\sqrt[3]{(30 - x)(30 - x)x} \le \frac{(30 - x) + (30 - x) + 2x}{3} = 20.$$

La igualtat s'assoleix quan $30 - x = 2x$, és a dir quan $x = 10$ cm.

$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 2(30 - x)(30 - x)2x \le 2 \cdot 20^3 = 16000 \text{ cm}^3$.

La igualtat s'assoleix quan $x = 10$ cm.

Per calcular el valor x a fi que el volum de l'ortoedre siga $10000\ \text{cm}^3$ hem de resoldre l'equació $4x^3 - 240x^2 + 36000 = 10000$.

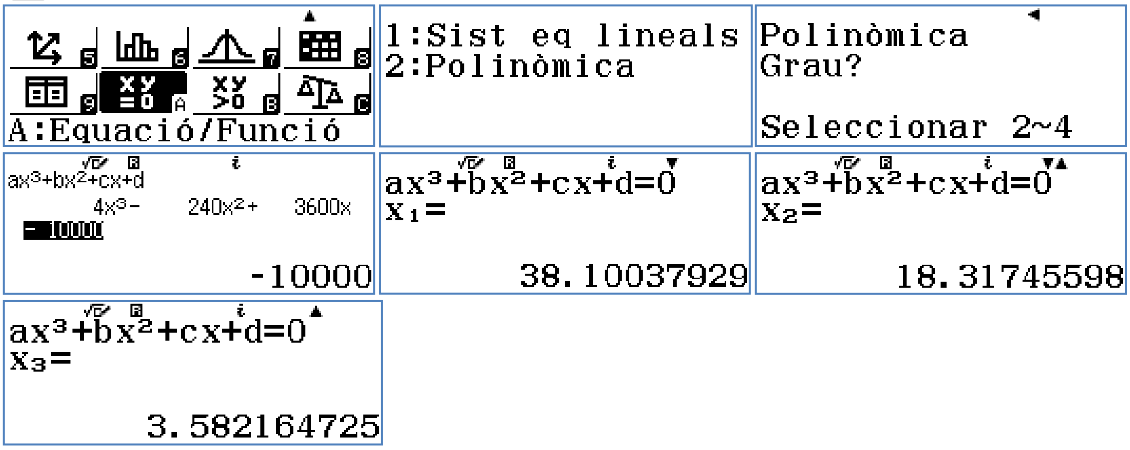
$4x^3 - 240x^2 + 3600x - 10000 = 0$.

Utilitzarem el menú Equacions de tercer grau de la calculadora Casio 991.

[MENU] [▶] [(−)] [2] [3]

[4] [=] [−] [2] [4] [0] [=] [3] [6] [0] [0] [°'"] [−] [1] [0] [0] [0] [0] [=] [=] [=]

[=]



La primera solució lo pertany al domini.

El problema té dues solucions $x \approx 18.32\ \text{cm}$, $x \approx 3.58\ \text{cm}$.