



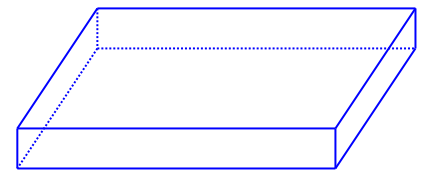
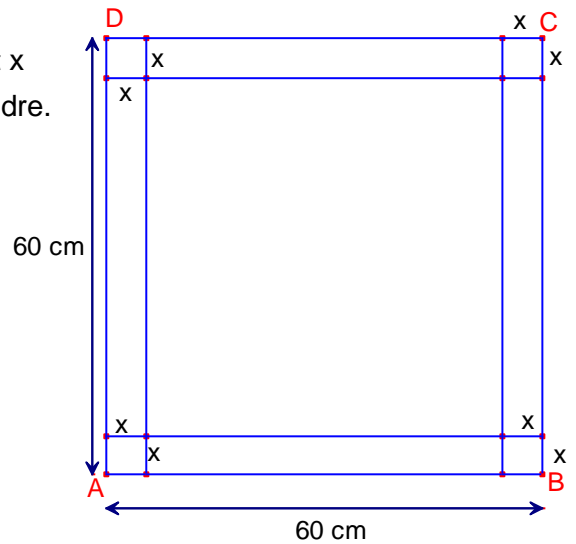
Funció volum d'un ortoedre.

En una cartolina quadrada ABCD, $\overline{AB} = 60$ cm, $\overline{AD} = 60$ cm, es retallem 4 quadradets iguals de costat x per tal de poder construir, plegant la cartolina, un ortoedre.

- Si $x = 1$ quin és el volum de l'ortoedre?
- Determineu els valors que pot tenir x .
- Ompliu la següent taula de valors.

x	$V(x)$
1	
2	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
x	$V(x) =$

- Representeu la gràfica de la funció volum.
- Observant la taula i la gràfica, determineu quin és el màxim volum de l'ortoedre?
- Quant ha de mesurar el costat x del quadrat que retallem a fi que el volum de l'ortoedre siga 10000 cm^3 ?



Solució:

Si retallem un quadrat de costat $x = 1$, la base de l'ortoeidre és un quadrat de costat 58 i altura x .

El volum és $V(1) = 58^2 \cdot 1 = 3364 \text{ cm}^3$.

Notem que els valors de x varien fins la meitat de la longitud del costat de la cartolina:

$$x \in [0, 30]$$

Si retallem un quadrat de costat $x \in [0, 30]$, la base de l'ortoeidre és un quadrat de costat $60 - 2x$ i altura x .

El volum és $V(x) = (60 - 2x)^2 x$.

$$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x, \quad x \in [0, 30].$$

Per construir la taula de la funció utilitzarem el menú Taula de la calculadora Casio 991 classwiz.

MENU **9**

4 **x** **x²** **3** **▶** **-** **2** **4** **0** **x** **x²** **+** **3** **6** **0** **0** **x** **=**
0 **=** **3** **0** **=** **1** **=**

9:Taula

$f(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$

Rang taula
 Inici: 0
 Fi : 30
 Pas : 1

x	f(x)
1	0
2	3364
3	6272
4	8748

x	f(x)
5	10816
6	12500
7	13824
8	14812

x	f(x)
9	15488
10	15876
11	16000
12	15884

x	f(x)
13	15552
14	15028
15	14336
16	13500

x	f(x)
17	12544
18	11492
19	10368
20	9196

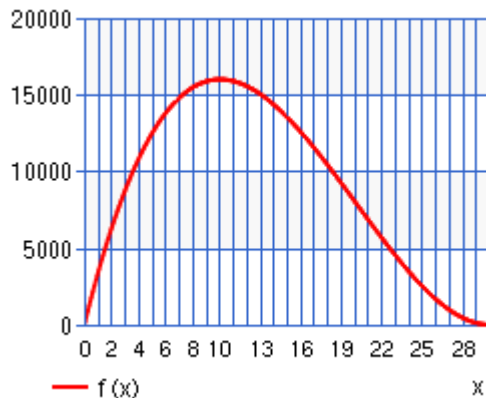
x	f(x)
21	8000
22	6804
23	5632
24	4508

x	f(x)
25	3456
26	2500
27	1664
28	972

x	f(x)
29	448
30	116
31	0
32	0

Per representar gràficament la funció utilitzarem la funció QR de la calculadora.

SHIFT **OPTN**

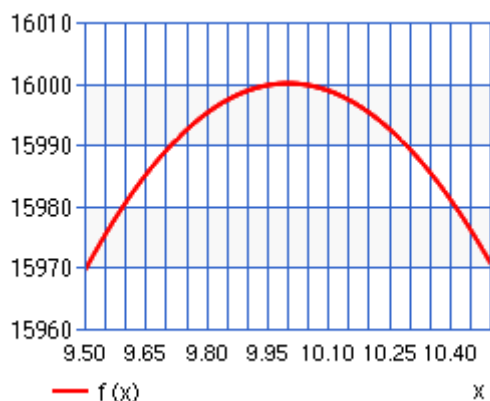


El màxim del volum de l'ortoeidre s'assoleix quan $x = 10 \text{ cm}$.

El volum màxim és $V(10) = 16000 \text{ cm}^3$.

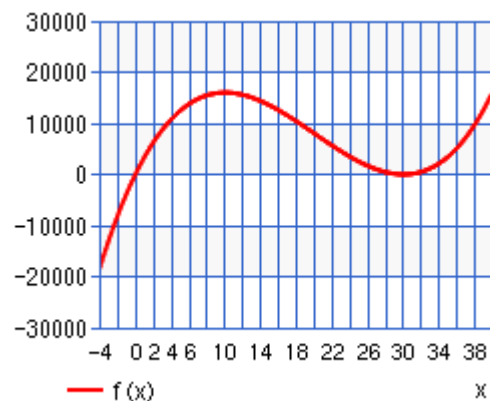
Podríem fer un interval més menut al voltant de $x = 10$ cm:

<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9.5</td><td>15969</td></tr> <tr><td>9.55</td><td>15975</td></tr> <tr><td>9.6</td><td>15980</td></tr> <tr><td>9.65</td><td>15985</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">9.5</p>	x	$f(x)$	9.5	15969	9.55	15975	9.6	15980	9.65	15985	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9.7</td><td>15989</td></tr> <tr><td>9.75</td><td>15992</td></tr> <tr><td>9.8</td><td>15995</td></tr> <tr><td>9.85</td><td>15997</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">9.85</p>	x	$f(x)$	9.7	15989	9.75	15992	9.8	15995	9.85	15997	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9.9</td><td>15998</td></tr> <tr><td>9.95</td><td>15999</td></tr> <tr><td>10</td><td>16000</td></tr> <tr><td>10.05</td><td>15999</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">10.05</p>	x	$f(x)$	9.9	15998	9.95	15999	10	16000	10.05	15999
x	$f(x)$																															
9.5	15969																															
9.55	15975																															
9.6	15980																															
9.65	15985																															
x	$f(x)$																															
9.7	15989																															
9.75	15992																															
9.8	15995																															
9.85	15997																															
x	$f(x)$																															
9.9	15998																															
9.95	15999																															
10	16000																															
10.05	15999																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>10.1</td><td>15998</td></tr> <tr><td>10.15</td><td>15997</td></tr> <tr><td>10.2</td><td>15995</td></tr> <tr><td>10.25</td><td>15992</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">10.25</p>	x	$f(x)$	10.1	15998	10.15	15997	10.2	15995	10.25	15992	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>10.3</td><td>15989</td></tr> <tr><td>10.35</td><td>15985</td></tr> <tr><td>10.4</td><td>15981</td></tr> <tr><td>10.45</td><td>15976</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">10.45</p>	x	$f(x)$	10.3	15989	10.35	15985	10.4	15981	10.45	15976											
x	$f(x)$																															
10.1	15998																															
10.15	15997																															
10.2	15995																															
10.25	15992																															
x	$f(x)$																															
10.3	15989																															
10.35	15985																															
10.4	15981																															
10.45	15976																															



Notem que el volum màxim s'assoleix en $x = 10$ cm.

La gràfica de la funció $f(x) = (60 - 2x)^2 x$ quan $x \in \mathbb{R}$.



Demostració:

$$(60 - 2x)^2 x = 2(30 - x)(30 - x)2x$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\sqrt[3]{(30 - x)(30 - x)x} \leq \frac{(30 - x) + (30 - x) + 2x}{3} = 20$$

La igualtat s'assoleix quan $30 - x = 2x$, és a dir quan $x = 10$ cm.

$$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 2(30 - x)(30 - x)2x \leq 2 \cdot 20^3 = 16000 \text{ cm}^3$$

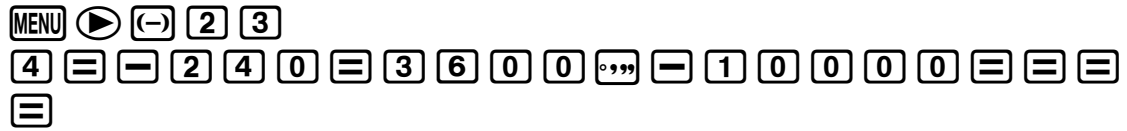
La igualtat s'assoleix quan $x = 10$ cm.

Per calcular el valor x a fi que el volum de l'ortoeidre siga 10000 cm³ hem de resoldre

l'equació $4x^3 - 240x^2 + 36000 = 10000$.

$$4x^3 - 240x^2 + 3600x - 10000 = 0.$$

Utilitzarem el menú Equacions de tercer grau de la calculadora Casio 991.



<p>A:Equació/Funció</p>	<p>1:Sist eq lineals 2:Polinòmica</p>	<p>Polinòmica Grau? Selecció 2~4</p>
<p>ax^3+bx^2+cx+d $4x^3-240x^2+3600x-10000$</p>	<p>$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $X_1=$ 38.10037929</p>	<p>$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $X_2=$ 18.31745598</p>
<p>$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $X_3=$ 3.582164725</p>		

La primera solució no pertany al domini.

El problema té dues solucions $x \approx 18.32$ cm, $x \approx 3.58$ cm.