



Àrea d'un triangle isòsceles inscrit en un quadrat.

Funció quadràtica

Siga un quadrat ABCD de costat 10 cm.

Siga K en el costat \overline{AD} . Siga $x = \overline{AK}$.

Construïm el triangle isòsceles $\triangle KLC$ inscrit en el quadrat.

a) Si $x = 1$ cm quina és l'àrea $S(1)$ del triangle.

b) Ompliu la següent taula:

| x cm | S(x) cm ² |
|------|----------------------|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| x | |

c) Quins valors pot tenir x.

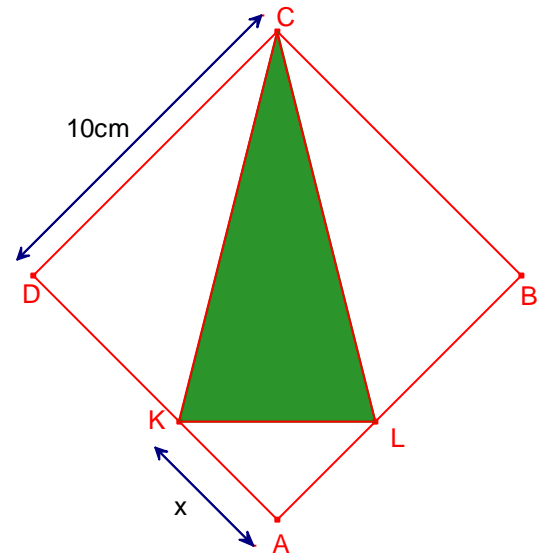
d) Quin tipus de funció és?. Escriu les seues característiques.

e) Representeu la gràfica de la funció.

f) Quin és el valor x tal que l'àrea del triangle siga màxima?. Quina és l'àrea màxima?.

g) Si l'àrea del triangle és 25 cm² quin és el valor de x?.

h) Per a quin valors de x l'àrea del triangle és major o igual que 25 cm² ?.



Solució:

Si $x = 1$, $\overline{DK} = 9$.

L'àrea del triangle $\triangle KLC$ és igual a l'àrea del quadrat menys les àrees dels triangles

rectangles $\triangle AKL$, $\triangle KDC$, $\triangle LBC$:

$$S(1) = 10^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \right) = 9'5 \text{ cm}^2.$$

$$S(x) = 10^2 - \left(\frac{1}{2} x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x) \right). \text{ Simplificant:}$$

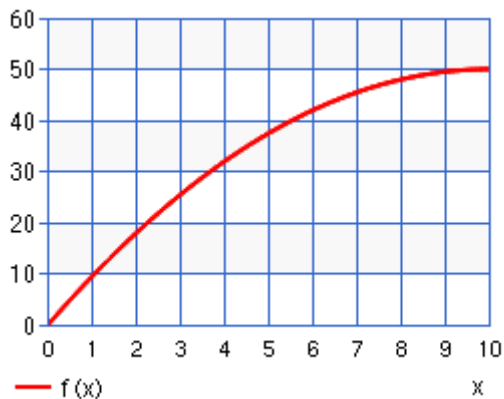
$$S(x) = -\frac{1}{2} x^2 + 10x, \quad x \in [0, 10].$$

La funció és una paràbola convexa.

Calcularem la taula de la valors de la gràfica amb la calculadora

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|------|---|----|----|------|----|----|----|------|--|---|------|---|----|---|------|---|----|---|------|
| $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$ | Rango tabla Inic.: 0 Final: 10 Paso : 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>9.5</td></tr> <tr><td>3</td><td>18</td></tr> <tr><td>4</td><td>25.5</td></tr> </table> | x | f(x) | 1 | 0 | 2 | 9.5 | 3 | 18 | 4 | 25.5 | <table border="1"> <tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr> <tr><td>5</td><td>32</td></tr> <tr><td>6</td><td>37.5</td></tr> <tr><td>7</td><td>42</td></tr> <tr><td>8</td><td>45.5</td></tr> </table> | x | f(x) | 5 | 32 | 6 | 37.5 | 7 | 42 | 8 | 45.5 |
| x | f(x) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 9.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 25.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x | f(x) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 32 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 37.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 45.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr><td>x</td><td>f(x)</td></tr> <tr><td>9</td><td>48</td></tr> <tr><td>10</td><td>49.5</td></tr> <tr><td>11</td><td>50</td></tr> <tr><td>12</td><td></td></tr> </table> | x | f(x) | 9 | 48 | 10 | 49.5 | 11 | 50 | 12 | | | | | | | | | | | | |
| x | f(x) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 48 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 49.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



Els punts de tall amb els eixos els calcularem resolent l'equació de segon grau

$$S(x) = 0:$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 10x = 0.$$

| | |
|--|---------------------------------|
| ax^2+bx+c - 0.5x ² + 10x + | |
| $ax^2+bx+c=0$ $x_1 =$ | $ax^2+bx+c=0$ $x_2 =$ |
| $Máx$ de $y=ax^2+bx+c$ $x =$ | $Máx$ de $y=ax^2+bx+c$ $y =$ |

$x = 20$ no pertany al domini.

L'eix de simetria és $x = 10$. El vèrtex és $V(10, 50)$.

Quan $x = 10$ l'àrea del triangle KLC és màxima. L'àrea és $S(10) = 50\text{cm}^2$.
La funció és creixent en l'interval de definició.

Per calcular el valor de x a fi que l'àrea del triangle siga 25cm^2 resoldrem l'equació
 $S(x) = 25\text{cm}^2$.

$$-\frac{1}{2}x^2 + 10x = 25.$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 10x - 25 = 0.$$

Utilitzarem el menú d'equacions de segon grau:

$$ax^2+bx+c$$

$$- 0.5x^2+ 10x - 25$$

$$-25$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1=$$

$$10+5\sqrt{2}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_2=$$

$$10-5\sqrt{2}$$

El primer resultat no pertany al domini de la funció:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_2=$$

$$2.928932188$$

L'àrea del triangle KLC és 25cm^2 quan $x = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2.93\text{cm}$.

Com que la funció és creixent en el domini $[0, 10]$.

L'àrea del triangle KLC és major o igual que 25cm^2 quan $x \in [10 - 5\sqrt{2}, 10]$.

També hauríem pogut utilitzar el menú d'inequacions de segon grau per resoldre l'apartat:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 10x \geq 25.$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 10x - 25 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

$$- 0.5x^2+ 10x - 25 \geq 0$$

$$-25$$

$$a \leq x \leq b$$

$$10-5\sqrt{2} \leq x \leq 10+5\sqrt{2}$$

Aleshores, $x \in [10 - 5\sqrt{2}, 10]$.