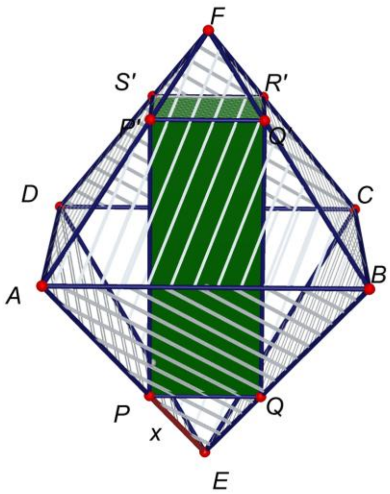
Àrea d'un prisma inscrit en un octaedre.

Siga l'octaedre regular ABCDEF d'aresta $\overline{AB} = 10\ \text{cm}$.



Siga P un punt de l'aresta $\overline{AE}$.

Siga PQRSP'Q'R'S' el prisma regular quadrangular inscrit en l'octaedre.

Siga $\overline{EP} = x$.

a) Si $x = 1\text{cm}$ calculeu l'àrea del prisma.

b) Ompliu la següent taula:

x	S(x) àrea del prisma
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
x	

c) Representeu la funció àrea del prisma. Quin tipus de funció és?.

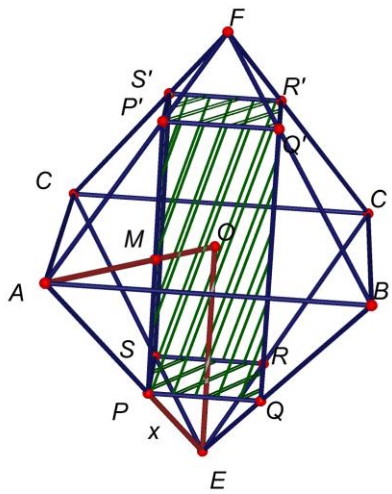
d) Si l'àrea del prisma és 100 cm^2 calculeu els possibles valors de x.

e) Calculeu el valor de x que fa màxim l'àrea del prisma.

Solució:

Notem que AECF és un quadrat $\angle AEC = 90^{\text{o}}$.

a)



Siga O el centre de l'octaedre.

$$\overline{OA} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AE} = 5\sqrt{2}.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{PP'}$ del prisma.

Siga $x = \overline{EP} = 1$.

$\overline{AP} = 10 - 1 = 9$.

$$\overline{MP} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AP} = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

L'altura del prisma és:

$$\overline{PP'} = 2\overline{MP} = 9\sqrt{2}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{EPQ}$ és equilàter.

L'aresta de la base del prisma és:

$\overline{PQ} = x = 1.$

L’àrea del prisma quan $x = 1$ és:

$S(1) = 2 \cdot 1^2 + 4\left(1 \cdot 9\sqrt{2}\right) = 2 + 36\sqrt{2} \approx 52.912 \text{ cm}^2$.

b)

Siga $x = \overline{EP}$. $\overline{AP} = 10 - x$.

$$\overline{MP} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AP} = \frac{(10-x)}{2}\sqrt{2} .$$

L’altura del prisma és:

$\overline{PP'} = 2\overline{MP} = (10 - x)\sqrt{2}$.

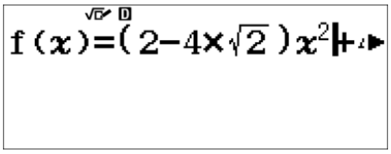
L’aresta de la base del prisma és $\overline{PQ} = x$.

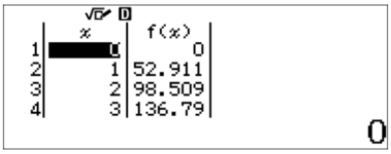
L’àrea del prisma és:

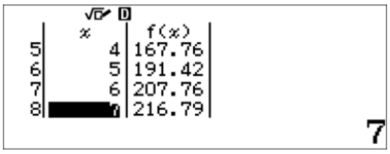
$S(x) = 2x^2 + 4\left(x\sqrt{2}(10 - x)\right), \; x \in [0, 10]$.

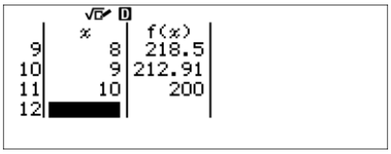
$S(x) = \left(2 - 4\sqrt{2}\right)x^2 + 40\sqrt{2}\, x$.

Per construir la taula utilitzarem el menú TAULA de la calculadora.



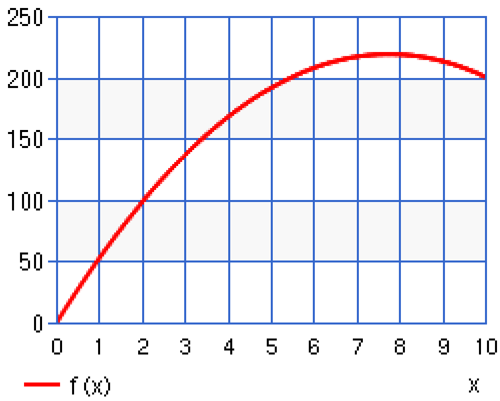




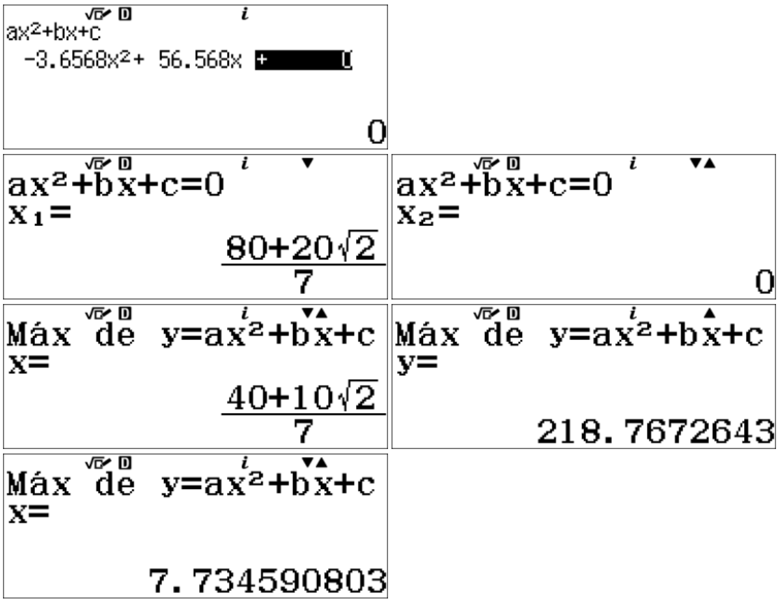


La funció és una paràbola convexa.

Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



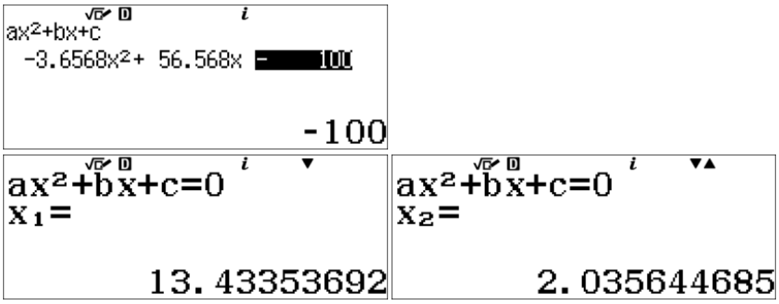
Per calcular el valor màxim de l'àrea del prisma resoldrem l'equació $S(x) = 0$ amb la calculadora que ens donarà el vèrtex de la paràbola.



El valor màxim de l'àrea s'assoleix quan $x = \frac{40+10\sqrt{2}}{7} \approx 7.73$ cm i l'àrea màxima és aproximadament $218.7673\ \text{cm}^2$.

Per calcular els valors de x tal que l'àrea del prisma és $100\ \text{cm}^2$, resoldrem l'equació $S(x) = 100$.

$\left(2 - 4\sqrt{2}\right)x^2 + 40\sqrt{2}\ x - 100 = 0$.



La primera solució no pertany al domini.

L'àrea del prisma és $100\ \text{cm}^2$ quan $x = 2.04$ cm.