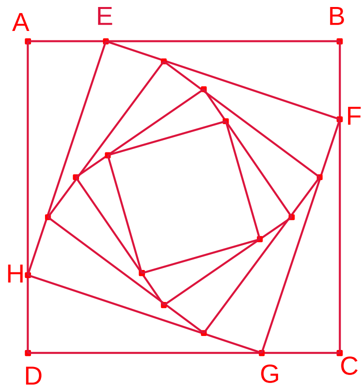
Suma de les àrees de quadrats



A partir del quadrat ABCD de costat 200 cm construïm el quadrat EFGH tal que $\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.

A partir del quadrat EFGH en construïm un altre amb el mateix procediment, i així successivament.

a) Determineu les mesures dels costats dels quadrats formats.
b) Determineu l'àrea dels quadrats formats.
c) El quadrat que ocupa el lloc 10, quina àrea té?
d) Quant suma l'àrea dels 10 primers quadrats?
e) Determineu la suma de les àrees dels infinits quadrats.

Solució:

a)

Siga $\{c_i\}$ successió dels costats.

$c_1 = c = 200$, costat del primer quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEH}$:

$c_2 = \overline{HE} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}c = 50\sqrt{5}$, costat del segon quadrat EFGH.

$$c_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c_2\right)^2} = \frac{c_2}{4}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\sqrt{10}}{4}c\,.$$

Els costats formen un progressió geomètrica de primer terme c i raó $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

El terme general és:

$$c_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} c\,.$$

b)

Siga $\{A_n\}$ la successió de les àrees dels quadrats.

La successió de les àrees el seus termes són els quadrats dels elements de la successió dels costats.

Aleshores les àrees formen un progressió geomètrica de primer terme c^2 i raó

$$r = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

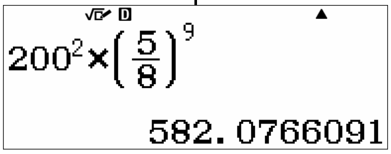
El terme general de les àrees és:

$$A_n = 200^2\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}.$$

c)

$$A_{10} = 200^2\left(\frac{5}{8}\right)^9.$$

Per calcular aquesta àrea utilitzarem la calculadora:

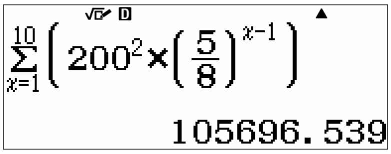


L'àrea del quadrat que ocupa el lloc 10 és $A_{10} = 200^2\left(\frac{5}{8}\right)^9 \approx 582.08\ \text{cm}^2$.

d)

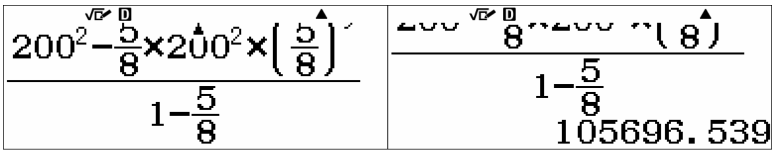
Per calcular la suma de les àrees dels 10 primers quadrat podem utilitzar la funció sumes finites de la calculadora:

$$S_{10} = \sum_{x=1}^{10} 200^2\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1}.$$



També podem utilitzar la suma dels 10 primers termes d'una progressió geomètrica:

$$S_{10} = \frac{A_1 - r\cdot A_{10}}{1-r} = \frac{200^2 - \frac{5}{8}200^2\left(\frac{5}{8}\right)^9}{1-\frac{5}{8}}.$$



Amb tots dos mètodes la suma de les àrees dels 10 primers quadrats és aproximadament:

$$S_{10} \approx 105696.54\ \text{cm}^2.$$

e)

$r = \frac{5}{8}$ la raó de les àrees.

Notem que $-1 < r < 1$, aleshores la successió de les àrees té suma infinita.

La suma de les infinites àrees dels quadrats és:

$$S_\infty = \frac{S_1}{1-r} = \frac{c^2}{1-\frac{5}{8}} = \frac{8}{3}c^2 = 200^2\,\frac{8}{3} = \frac{320000}{3} \approx 106666.67\ \text{cm}^2.$$