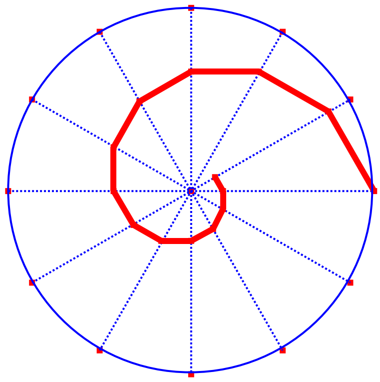
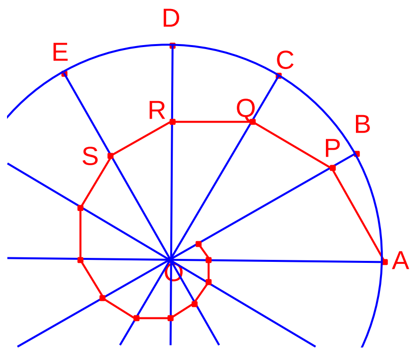
Longitud d'una espiral



Una circumferència de radi 1 s'ha dividit en dotze parts iguals i s'uneixen els punts de cada divisió amb el centre.
Per un d'aquests punts tracem una perpendicular al radi següent; pel peu de la perpendicular anterior tracem una perpendicular al radi següent i així successivament. (veure figura).
a) Quant mesura el segment que fa 12.
b) Calcula el terme general.
c) Quant mesura la suma dels 12 primers segments
d) Calculeu la suma dels infinits segments.

Solució:
Siga la circumferència de radi r i centre O.
Siguen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L les dotze parts.
Els angles centrals que forma la divisió és:



$$\angle AOB = \frac{360^o}{12} = 30^o.$$

Siguen P, Q, R, S,.... les projeccions dels punts A, P, Q, R,... sobre els radis, respectivament.

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2}.\ \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \overline{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{OQ} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \overline{OR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les longituds dels segments formen una progressió geomètrica de primer terme

$a_1 = \frac{1}{2}$ i raó $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

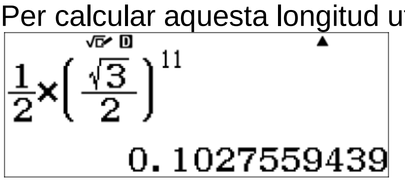
a) b)
El terme general és:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

La mesura del segment que fa 12 és:

$$a_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}.$$

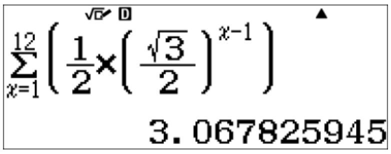
Per calcular aquesta longitud utilitzarem la calculadora:



La longitud aproximada és: $a_{12} \approx 0.10$ cm.

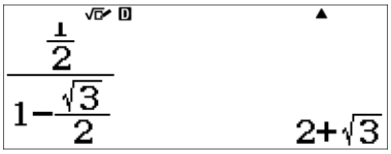
c)
Per calcular la suma de les longituds dels 12 primers segments utilitzarem la funció sumes finites de la calculadora:

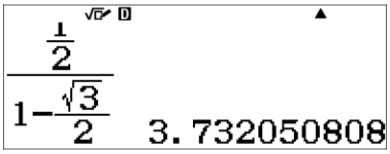
$$S_{12} = \sum_{x=1}^{12} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x-1}.$$



La suma de les longituds dels 12 primers segments és aproximadament:
$S_{12} \approx 3.07$ cm
d)
Notem que la raó de la successió és $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-1 < r < 1$.
La suma infinita de la longituds dels segments és:

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$





La suma dels infinits segments és $S_{\infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} 2+\sqrt{3} \approx 3.73$ cm.