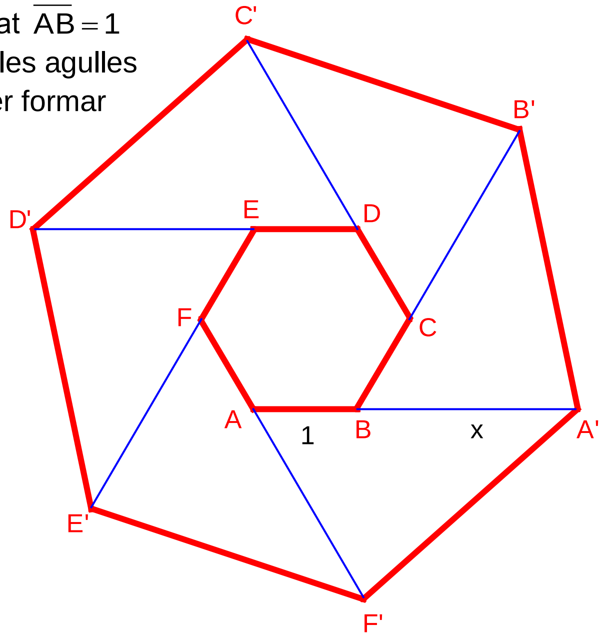
Proporció entre les àrees de dos hexàgons.



Cada costat d'un hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB}=1$ s'estén una distància x en la direcció contrària que les agulles del rellotge. Els punts obtinguts estan connectats per formar un nou hexàgon regular A'B'C'D'E'F'.

a) Si $x=1$ calculeu la proporció $P(1)$ entre les àrees del nou hexàgon i l'àrea de l'hexàgon original.

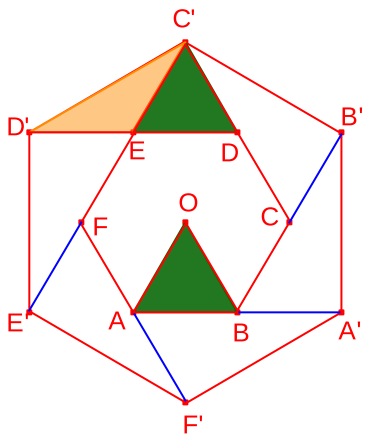
b) Ompliu la taula següent:

$x=\overline{BA'}$	Proporció àrees $P(x)=\dfrac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}}$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
x	

c) Quin tipus de funció és?. Escriu les seues característiques. Representeu la gràfica de la funció.

Solució:

a)



Siga $\overline{BA'}=1$.

Siga ABCDEF l'hexàgon regular inicial de centre O.

Siga $S=S_{ABO}$.

$S_{ABCDEF}=6\cdot S$

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura, tenen la mateixa àrea:

$S_{EDC'}=S_{ABO}=S$

$S_{D'DC'}=S_{EDC'}=S$.

$S_{A'B'C'D'E'F'}=S_{ABCDEF}+6\cdot S_{D'EC'}+6\cdot S_{EDC'}=18\cdot S$.

$$P(1)=\frac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}}=\frac{18\cdot S}{6\cdot S}=3.$$

b)

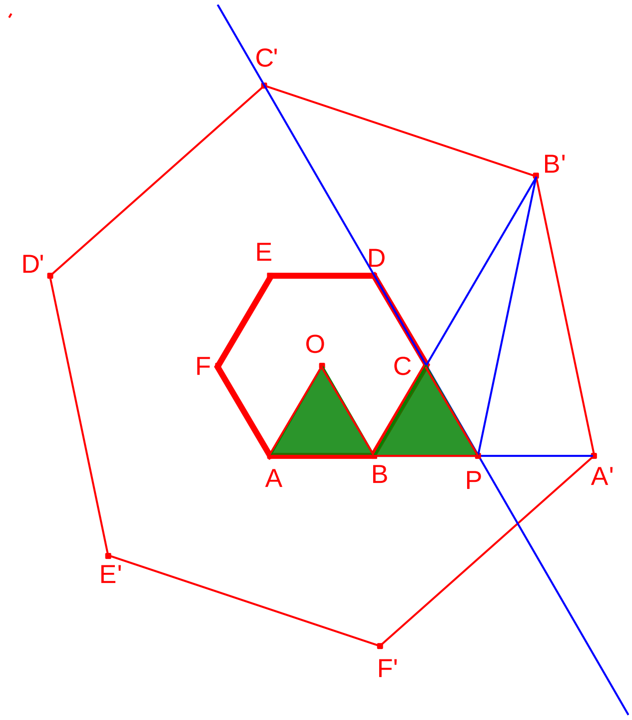
Siga $\overline{BA'} = x$.

Siga $S = S_{ABO}$.

$S_{ABCDEF} = 6S$.

La recta AA’ talla la recta CD en el punt P.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:



$S_{BPC} = S_{ABO} = S$.

$\overline{CB'} = x$.

$S_{CB'P} = x \cdot S_{BPC} = x \div S$.

$S_{BPB'} = (1+x)S$.

$\overline{PA'} = x - 1$.

$S_{PA'B'} = (x-1)S_{BPB'} = \left(x^2 - 1\right)S$.

$S_{BA'B'} = S_{BPB'} + SPA'B' = \left(x^2 + x\right)S$.

$S_{D'DC'} = S_{EDC'} = S$.

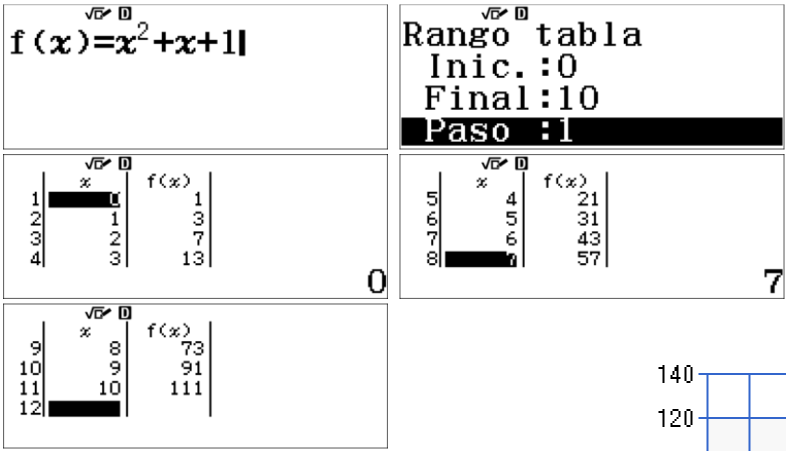
.

$S_{A'B'C'D'E'F'} = S_{ABCDEF} + 6 \cdot S_{BA'B'} = 6\left(x^2 + x + 1\right) \cdot S$.

$$P(x) = \frac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}} = \frac{6\left(x^2 + x + 1\right) \cdot S}{6 \cdot S} = x^2 + x + 1.$$

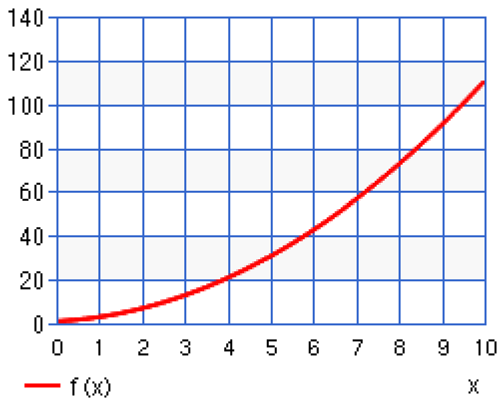
$P(x) = x^2 + x + 1,\ x \in [0, +\infty[$.

Per construir la taula utilitzarem el menú TAULA de la calculadora:



La funció és una paràbola còncava.

Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



b)

Una altra forma de construcció de la funció:

$\angle A'BB' = 60^{o}$, $\overline{BA'} = x$, $\overline{BB'} = 1 + x$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $B\overset{\Delta}{A'}B'$:

$\overline{A'B'}^2 = x^2 + (1+x)^2 - 2x(1+x)\cos 60^{o}$.

$\overline{A'B'}^2 = x^2 + x + 1$.

Els hexàgons són regulars. La proporció de les àrees és igual al quadrat de la proporció dels costats:

$$P(x) = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} = x^2 + x + 1.$$