



Proporció entre dos volums.

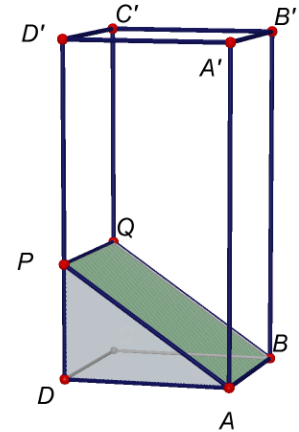
Siga el prisma recta regular quadrangular ABCDA'B'C'D' tal que $\overline{AB} = 10$, $\overline{AA'} = 20$.

Siguen els punts P de l'aresta $\overline{DD'}$ i Q de l'aresta $\overline{CC'}$ tal que $\overline{DP} = \overline{CQ} = x$.

El plànol que passa per A, B, P i Q divideix el prisma en dos poliedres.

- Si $x = 2$ calculeu la proporció P(1) entre els volums dels poliedres inferior i superior.
- Ompliu la següent taula:

$x = \overline{DP}$	Proporció de Volums
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	
x	P(x) =



c) Dibuixeu la funció P(x). Quin tipus de funció és?. Escriu les seues característiques.

d) Si la proporció dels volums és $\frac{1}{2}$, calculeu el valor de x.

e) En uns mateixos eixos de coordenades dibuixeu les funcions $f(x) = \frac{-40}{x}$, P(x).

Compareu les dues funcions

Solució:

a) b) c)

El volum del prisma ABCDA'B'C'D' és:

$$V_{\text{ABCD}A'B'C'D'} = 10^2 \cdot 20 = 2000.$$

ABCDPQ és un prisma triangular de base el

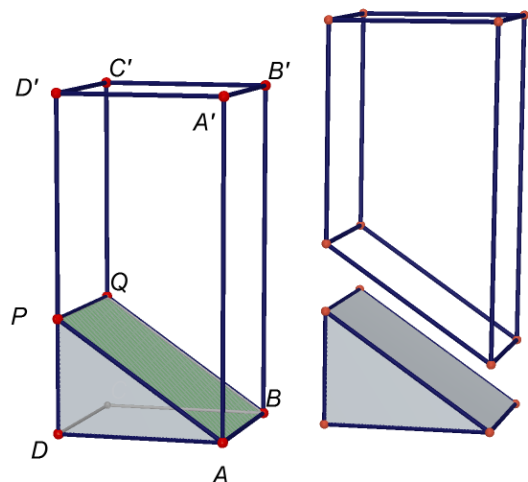
triangle rectangle $\triangle ADP$.

El volum del prisma ABCDPQ és:

$$V_{\text{ABCD}PQ} = \frac{1}{2} 10^2 \cdot x = 50x.$$

El volum del poliedre ABQPA'B'C'D' és:

$$V_{\text{ABQP}A'B'C'D'} = V_{\text{ABCD}A'B'C'D'} - V_{\text{ABCD}PQ}.$$



$$V_{ABQPAB'C'D'} = 2000 - 50x.$$

La proporció entre els volums dels dos poliedres és:

$$P(x) = \frac{50x}{2000 - 50x}, \quad x \in [0, 20].$$

$$P(x) = \frac{x}{40 - x}.$$

$$P(x) = -1 + \frac{-40}{40 - x}.$$

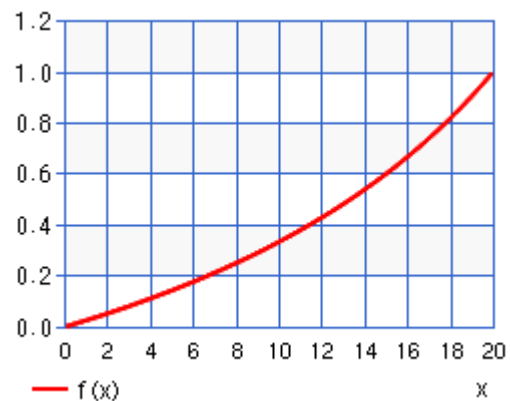
La funció és una hipèrbola.

Per construir la taula utilitzarem el menú *TAULA* de la calculadora:

$f(x) = \frac{x}{40-x}$	Rango tabla Inic.: 0 Final: 20 Paso : 2																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.0526</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.1111</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.1764</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	1	0	2	0.0526	3	0.1111	4	0.1764	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>0.25</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.3333</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.4285</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.5384</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	5	0.25	6	0.3333	7	0.4285	8	0.5384
x	f(x)																				
1	0																				
2	0.0526																				
3	0.1111																				
4	0.1764																				
x	f(x)																				
5	0.25																				
6	0.3333																				
7	0.4285																				
8	0.5384																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9</td><td>0.6666</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.8181</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td></tr> <tr><td>12</td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	9	0.6666	10	0.8181	11	1	12												
x	f(x)																				
9	0.6666																				
10	0.8181																				
11	1																				
12																					

$$P(2) = \frac{1}{19} \approx 0.0526.$$

Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



d)

Per calcular el valor x tal que la proporció dels volums és $\frac{1}{2}$, resolrem l'equació:

$$P(x) = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{40-x} = \frac{1}{2}.$$

Per resoldre l'equació utilitzarem la funció *SOLVE* de la calculadora:

$\frac{x}{40-x} = \frac{1}{2}$
$\frac{x}{40-x} = \frac{1}{2}$ x= 13.33333333 L-R= 0

La proporció dels volums és $\frac{1}{2}$ quan $x = \frac{40}{3} \approx 13.33$.

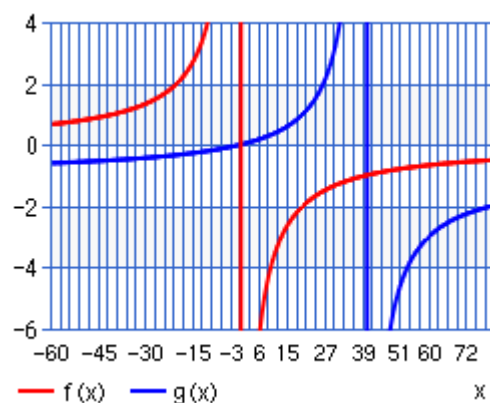
e)

Per dibuixar les funcions $f(x) = \frac{-40}{x}$, $P(x)$ en la mateixa gràfica utilitzarem el menú

TAULA amb dues funcions:

$f(x) = \frac{-40}{x}$	$g(x) = \frac{x}{40-x}$																														
Rangó tabla Inic.: -100 Final: 100 Paso : 10																															
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>-40</td><td>-0.714</td></tr> <tr><td>2</td><td>-20</td><td>-0.692</td></tr> <tr><td>3</td><td>-13.333</td><td>-0.666</td></tr> <tr><td>4</td><td>-10</td><td>-0.636</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	1	-40	-0.714	2	-20	-0.692	3	-13.333	-0.666	4	-10	-0.636	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>-8</td><td>-0.6</td></tr> <tr><td>6</td><td>-6.666</td><td>-0.555</td></tr> <tr><td>7</td><td>-5.714</td><td>-0.5</td></tr> <tr><td>8</td><td>-5</td><td>-0.428</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	5	-8	-0.6	6	-6.666	-0.555	7	-5.714	-0.5	8	-5	-0.428
x	f(x)	g(x)																													
1	-40	-0.714																													
2	-20	-0.692																													
3	-13.333	-0.666																													
4	-10	-0.636																													
x	f(x)	g(x)																													
5	-8	-0.6																													
6	-6.666	-0.555																													
7	-5.714	-0.5																													
8	-5	-0.428																													
-100	-30																														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9</td><td>-4.444</td><td>-0.333</td></tr> <tr><td>10</td><td>-4</td><td>-0.2</td></tr> <tr><td>11</td><td>-3.636</td><td>0</td></tr> <tr><td>12</td><td>-3.333</td><td>0.3333</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	9	-4.444	-0.333	10	-4	-0.2	11	-3.636	0	12	-3.333	0.3333	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>13</td><td>-3.077</td><td>1</td></tr> <tr><td>14</td><td>-2.857</td><td>3</td></tr> <tr><td>15</td><td>-2.667</td><td>ERROR</td></tr> <tr><td>16</td><td>-2.5</td><td>-5</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	13	-3.077	1	14	-2.857	3	15	-2.667	ERROR	16	-2.5	-5
x	f(x)	g(x)																													
9	-4.444	-0.333																													
10	-4	-0.2																													
11	-3.636	0																													
12	-3.333	0.3333																													
x	f(x)	g(x)																													
13	-3.077	1																													
14	-2.857	3																													
15	-2.667	ERROR																													
16	-2.5	-5																													
10	50																														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>17</td><td>-2.353</td><td>-3</td></tr> <tr><td>18</td><td>-2.222</td><td>-2.333</td></tr> <tr><td>19</td><td>-2.105</td><td>-2</td></tr> <tr><td>20</td><td>-2</td><td>-1.8</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	17	-2.353	-3	18	-2.222	-2.333	19	-2.105	-2	20	-2	-1.8																
x	f(x)	g(x)																													
17	-2.353	-3																													
18	-2.222	-2.333																													
19	-2.105	-2																													
20	-2	-1.8																													
90																															

Per representar les funcions utilitzarem el codi QR de la calculadora:



La funció $P(x)$ és un trasllat de la funció hipèrbola equilàtera $f(x) = \frac{-40}{x}$.

El trasllat és de 40 unitats horitzontals i -1 unitat vertical.