Problema d’optimització.

Quines dimensions ha de tenir un cassó en forma de cilindre d’un litre de capacitat perquè la superfície total siga mínima. Calculeu la superfície mínima

Solució:

$1\text{litre} \equiv 1000\text{cm}^3$.

Siga r el radi del cilindre i h l’altura.

El volum del cilindre és:

$V = \pi r^2 \cdot h$.

$\pi r^2 h = 1000$.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (1)$$

La superfície del cassó està formada per un cercle de radi r i un rectangle de base $2\pi r$ i altura h. Aleshores l’àrea total del cilindre és:

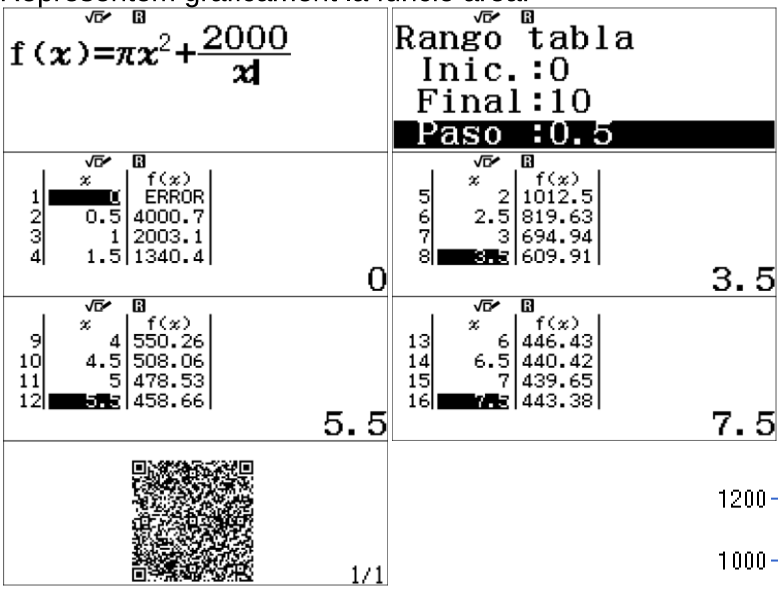
$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi rh \qquad (2)$$

Substituint l’expressió (1) en l’expressió (2), la funció a optimitzar és:

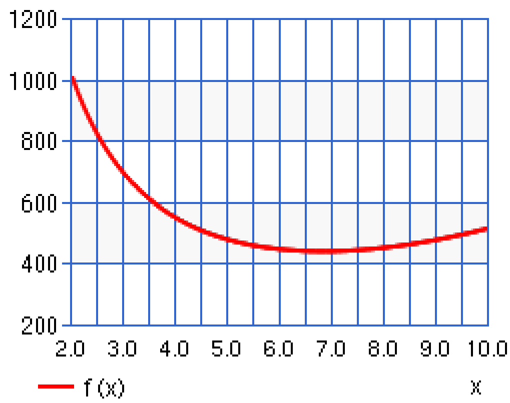
$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2}, \; r > 0.$$

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0.$$

Representem gràficament la funció àrea:



Per representar la funció utilitzarem la funció QR de la calculadora:



Resolem amb ajut de la calculadora $S'(r)=0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\pi x^2+\frac{2000}{x}\right)\bigg|_{x=x}=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\pi x^2+\frac{2000}{x}\right)\bigg|_{x=x}=0$$

$x=6$

$$\frac{d}{dx}\left(\pi x^2+\frac{2000}{x}\right)\bigg|_{x=x}=0$$

$x=$ 6.82784073

L−R= 0

El mínim de l'àrea s'assoleix quan $x\approx 6.83$ cm

Guardem el valor del radi en la calculadora:

Ans→A

6.82784073

Calculem l'àrea mínima:

$$\pi A^2+\frac{2000}{A}$$

439.3775663

L'àrea mínima és:

$S(6.82784073)\approx 439.38\text{cm}^2$.

Notem que $\frac{r}{h}=1$.