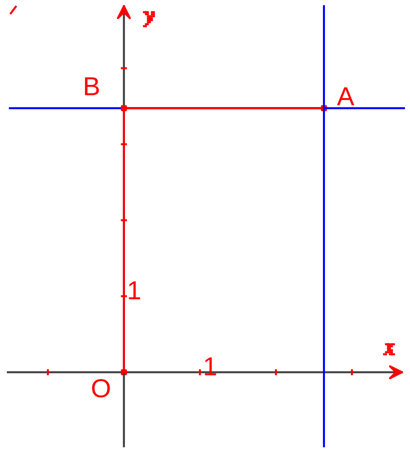
Problema d'optimització.

Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0,0)$, $A(x,y)$ i $B(0,y)$, en què $x>0$, $y>0$, i tal que la suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'àrea del triangle T en funció d'x.
b) El valor d'x per al qual aquesta àrea és màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.
Pau's València juliol 2017

Solució:



$\overline{AB}=x$, $\overline{OB}=y$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:
$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S(x,y)=\frac{1}{2}xy.$$

La suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.

$\sqrt{x^2+y^2}+x=30$.

$\sqrt{x^2+y^2}=30-x$. Elevant al quadrat i simplificant:

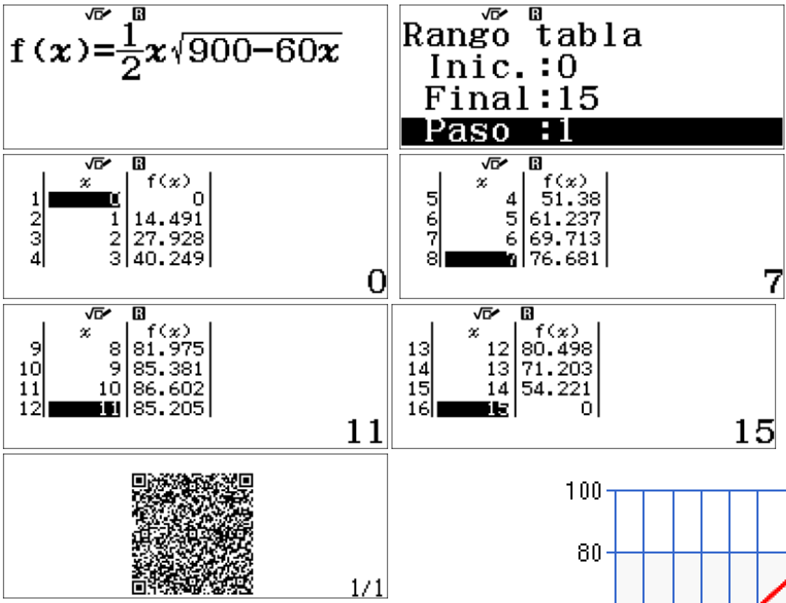
$y^2=900-60x$.

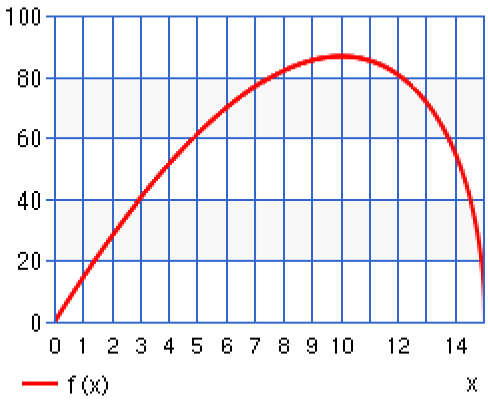
$y=+\sqrt{900-60x}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

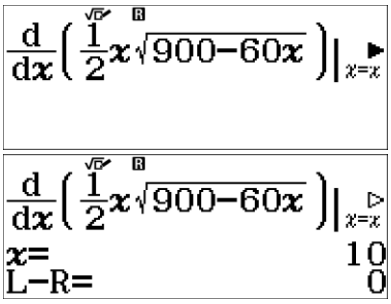
$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{900-60x},\ x>0.$$

Representem gràficament la funció àrea:





Resolem amb ajut de la calculadora $S'(x)=0$.



Aleshores, $x=10$ és un màxim

Observant la taula l'àrea màxima és:

$S(10)\approx 86.60\ m^2$.