



Problema d'optimització.

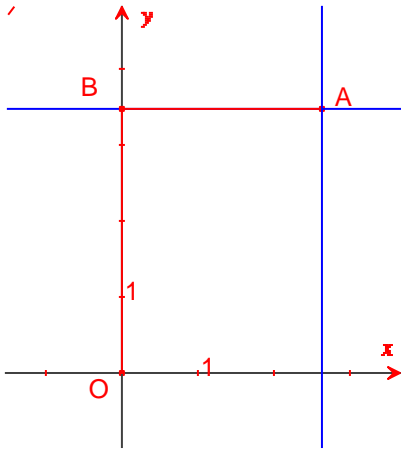
Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0, 0)$, $A(x, y)$ i $B(0, y)$, en què $x > 0$, $y > 0$, i tal que la suma de les longituds dels costats \overline{OA} i \overline{AB} és de 30 metres.

Obtenui raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

- L'àrea del triangle T en funció d' x .
- El valor d' x per al qual aquesta àrea és màxima.
- El valor d'aquesta àrea màxima.

Pau's València juliol 2017

Solució:



$\overline{AB} = x$, $\overline{OB} = y$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\hat{A}B$:
 $\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

L'àrea del triangle rectangle $O\hat{A}B$ és:

$$S(x, y) = \frac{1}{2}xy.$$

La suma de les longituds dels costats \overline{OA} i \overline{AB} és de 30 metres.

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 30.$$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x$. Elevant al quadrat i simplificant:

$$y^2 = 900 - 60x.$$

$$y = +\sqrt{900 - 60x}.$$

L'àrea del triangle rectangle $O\hat{A}B$ és:

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 60x}, \quad x > 0.$$

Representem gràficament la funció àrea:

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900-60x}$$

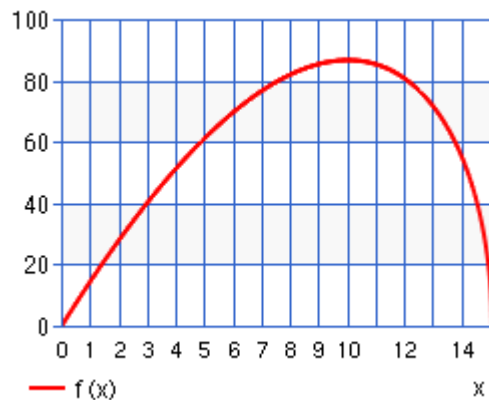
Rangó tabla
Inic.:0
Final:15
Paso :1

| x | f(x) |
|---|--------|
| 1 | 0 |
| 2 | 14.491 |
| 3 | 27.928 |
| 4 | 40.249 |

| x | f(x) |
|---|--------|
| 5 | 51.38 |
| 6 | 61.237 |
| 7 | 69.713 |
| 8 | 76.681 |

| x | f(x) |
|----|--------|
| 9 | 81.975 |
| 10 | 85.381 |
| 11 | 86.602 |
| 12 | 85.205 |

| x | f(x) |
|----|--------|
| 13 | 80.498 |
| 14 | 71.203 |
| 15 | 54.221 |
| 16 | 0 |



Resolem amb ajud de la calculadora $S'(x) = 0$.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x\sqrt{900-60x} \right) \Big|_{x=x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x\sqrt{900-60x} \right) \Big|_{x=x}$$

x= 10
L-R= 0

Aleshores, $x = 10$ és un màxim

Observant la taula l'àrea màxima és:

$$S(10) \approx 86.60 \text{ m}^2.$$