

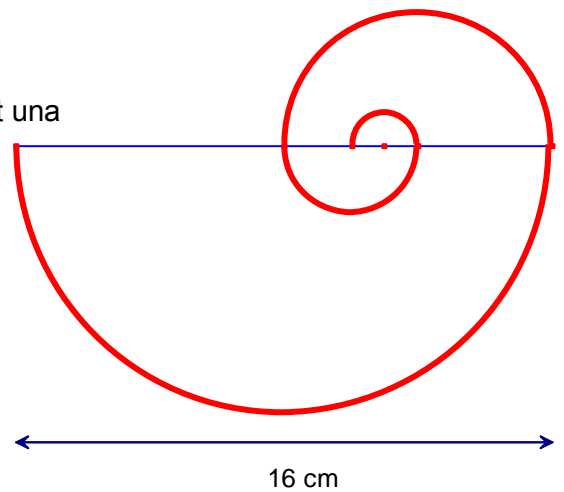


## Longitud espiral.

Sobre un segment de 16 cm com diàmetre s'ha dibuixat una semicircumferència.

Després s'ha prolongar mitjançant una semicircumferència de radi la meitat de l'anterior i així successivament.

- Calculeu la longitud total de la figura.
- Calculeu la longitud total de 10 semicircumferències.
- Si seguim fins l'infinit quina seria la longitud.



Solució:

La primera semicircumferència mesura:

$$L_1 = 8\pi.$$

La segona semicircumferència mesura:

$$L_2 = 4\pi.$$

La tercer semicircumferència mesura:

$$L_3 = 2\pi.$$

La tercer semicircumferència mesura:

$$L_4 = \pi.$$

Les longituds de les semicircumferències formen una progressió geomètrica de primer terme  $L_1 = 8\pi$  i raó  $\frac{1}{2}$ .

a)

La suma de les 4 primeres semicircumferències és:

$$S_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 15\pi \approx 47.12 \text{ cm}.$$

b)

El terme general de la successió de les longituds de les semicircumferències és:

$$L_n = 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Per calcular la suma de les 10 primeres semicircumferències utilitzarem la funció **SUMA** de la calculadora:

$$\sum_{x=1}^{10} \left( 8\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \right).$$

$\sum_{x=1}^{10} \left( 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \right)$	$\sum_{x=1}^{10} \left( 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \right)$
	50.21639507

$$S_{10} \approx 50.22 \text{ cm}.$$

La suma del n primers termes és:

$$S_n = \frac{L_1 - \frac{1}{2}L_n}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right).$$

Utilitzant la funció **CALC** de la calculadora:

$16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^x \right)$	
$16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^x \right)$	$16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^x \right)$
$x = 4$	$15\pi$
$16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^x \right)$	$16\pi \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^x \right)$
$x = 10$	50.21639507

$$S_4 = 16\pi \left( 1 - \frac{1}{16} \right) = 15\pi \approx 47.12 \text{ cm.} \quad S_{10} = 16\pi \left( 1 - \frac{1}{1024} \right) = \frac{1024}{64} \pi \approx 50.22 \text{ cm.}$$

c)

Com que la raó de la longitud de les semicircumferències és  $r = \frac{1}{2} < 1$  la suma infinita

és:

$$S_\infty = \frac{L_1}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi \approx 50.27.$$

Notem que la suma infinita és igual a la longitud de la circumferència de diàmetre 16 cm.