Rectes tangent i normal a una funció.

Siga la funció $y = x^3$. Siga $P(1,1)$ un punt de a funció.

Pel punt P dibuixem les rectes tangent i normal a la corba $y = x^3$.

Calculeu l'àrea del triangle limitat per la recta tangent, la recta normal i l'eix d'abscisses.

Solució:

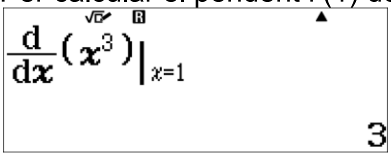
Siga $f(x) = x^3$.

Notem que el punt $P(1,1)$ pertany a la funció $f(x) = x^3$.

L'equació de la recta tangent a la corba en $x = 1$ és: $r_T \equiv y = f'(1)(x-1)+1$.

L'equació de la recta tangent a la corba en $x = 1$ és: $r_N \equiv y = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)+1$.

Per calcular el pendent f'(1) de la recta tangent utilitzarem la calculadora:



$f'(1) = 3$.

L'equació de la recta tangent és:

$r_T \equiv y = 3(x-1)+1$.

$r_T \equiv y = 3x-2$.

El punt de tall de la recta tangent i l'eix d'abscisses té coordenades $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

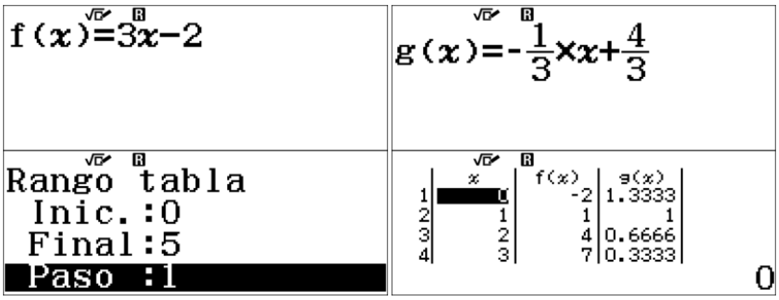
L'equació de la recta normal és:

$r_N \equiv y = -\frac{1}{3}(x-1)+1$.

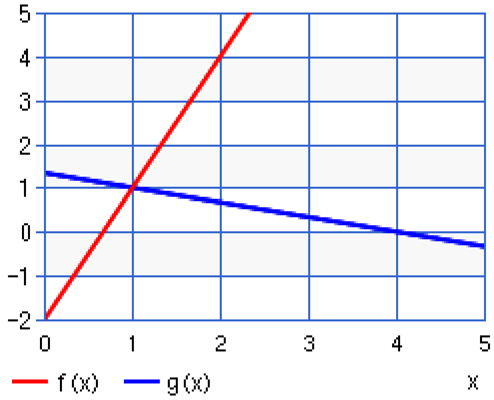
$r_N \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

El punt de tall de la recta normal i l'eix d'abscisses té coordenades $B(4, 0)$.

Dibuixem les rectes tangent i normal a la corba en $P(1,1)$



Per dibuixar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



L'àrea que cerquem és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$.

$\overline{AB} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ sobre la base $\overline{AB}$ és 1.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\frac{10}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

La gràfica de les tres funcions a escala 1:1.