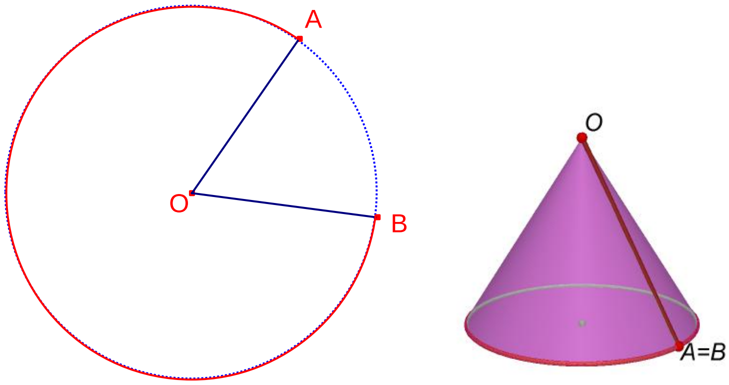
Con de volum màxim.

Donada un cercle de radi 10 retallem un sector AOB d'angle $x = \angle AOB$ per formar un con.

a) Calculeu el volum del con en funció de l'angle $x = \angle AOB$.

b) Calculeu el valor de l'angle $x = \angle AOB$ que fa màxim el volum del con.



Solució1:

Considerem angle $x = \angle AOB$ en mesures radians.

$\overline{OA} = 10$ és la generatriu del con.

La longitud de la circumferència de la base del con és:

$2\pi \cdot 10 - 10x$.

El radi de la base del con és:

$r = \dfrac{20\pi - 10x}{2\pi}$. Simplificant:

$r = \dfrac{10\pi - 5x}{\pi}$

Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del con és:

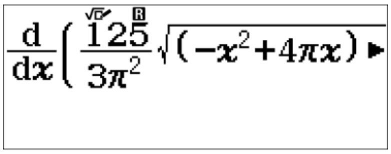
$$h = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - \left(\frac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2} = \frac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}\,.$$

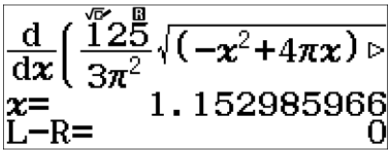
El volum del con és: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

$V(x) = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2 \dfrac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}$ Simplificant:

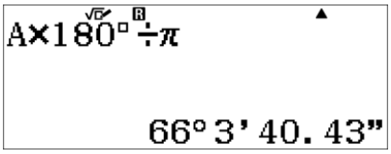
$$V(x) = \frac{125}{3\pi^2}\sqrt{(-x^2 + 4\pi x)(2\pi - x)^4}\ ,\ \ x \in [0, 2\pi]$$

Calculem $V'(x) = 0$, amb ajut de la calculadora:



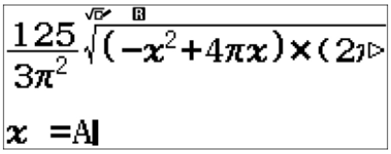


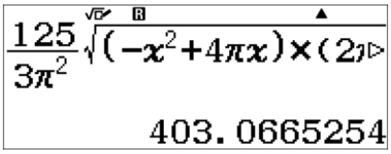
$x \approx 1.1523$



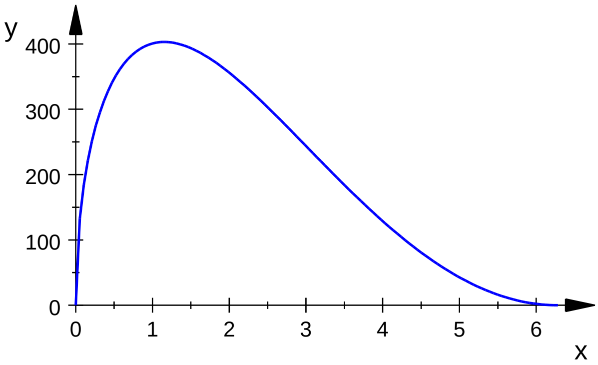
$x = \angle AOB \approx 66º3'41''$.

El volum màxim és





El volum màxim és $V_{max} = 403.07$.



Solució 2:

Considerem angle $x = \angle AOB$ en mesures radians.

$\overline{OA} = 10$ és la generatriu del con.

La longitud de la circumferència de la base del con és:

$2\pi \cdot 10 - 10x$.

El radi de la base del con és:

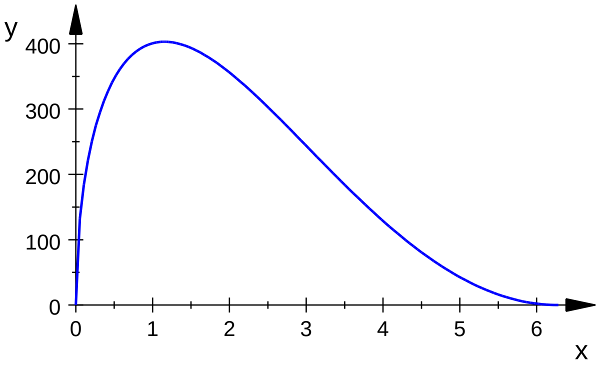
$r = \dfrac{20\pi - 10x}{2\pi}$. Simplificant:

$r = \dfrac{10\pi - 5x}{\pi}$

Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del con és:

$$h = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - \left(\frac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2} = \frac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}.$$

El volum del con és: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.



$V(x) = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2 \dfrac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}$ Simplificant:

$V(x) = \dfrac{125}{3\pi^2}\sqrt{(-x^2 + 4\pi x)(2\pi - x)^4}$, $x \in [0, 2\pi]$

$V'(x) = \dfrac{125}{3\pi^2}\dfrac{-(x-2\pi)^3\left(3x^2 - 12\pi x + 4\pi^2\right)}{\sqrt{(x^2 - 4\pi x)(2\pi - x)^4}}$.

$V'(x) = 0$. Resolent l'equació:

$x = \dfrac{2\left(3 - \sqrt{6}\right)\pi}{3} \approx 1.152985987$.

Estudiant el signe de la primera derivada al voltant de $x = \dfrac{2\left(3 - \sqrt{6}\right)\pi}{3}$, notem que és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim és:

$$V\left(\frac{2\left(3 - \sqrt{6}\right)\pi}{3}\right) = \frac{2000\pi\sqrt{3}}{27} \approx 403.07.$$