Problema

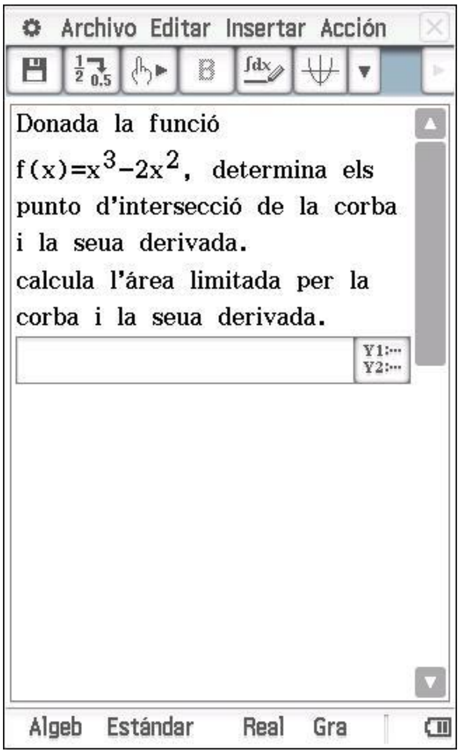
Donada la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$, determina els punts d'intersecció de la corba i la seua derivada.

Calcula l'àrea limitada per la corba i la seua derivada.

Obrim una eActivity.

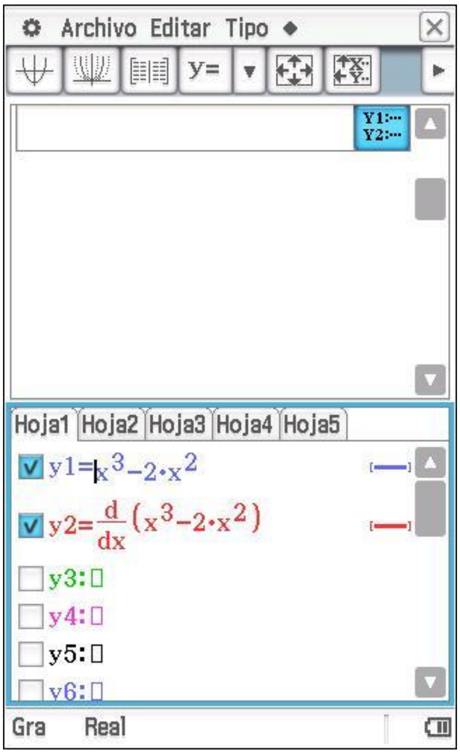
Solució gràfica:

Dibuixem les dues corbes i calculem els punts d'intersecció de ambdues corbes.

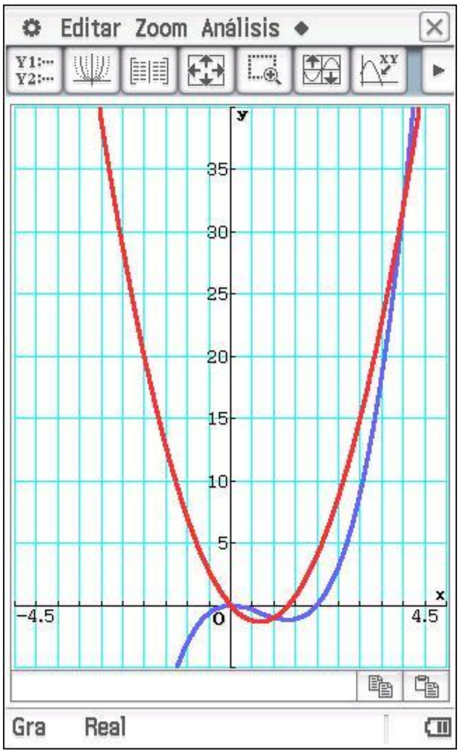


Obrim una finestra de funcions:

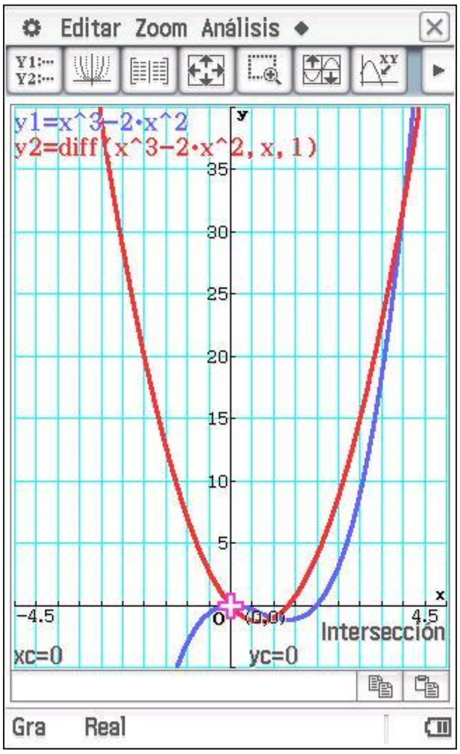
Definim la funció f(x) i la seua derivada.

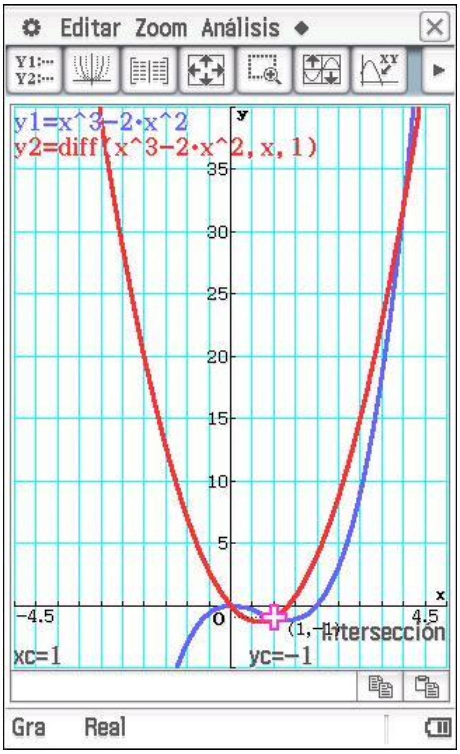


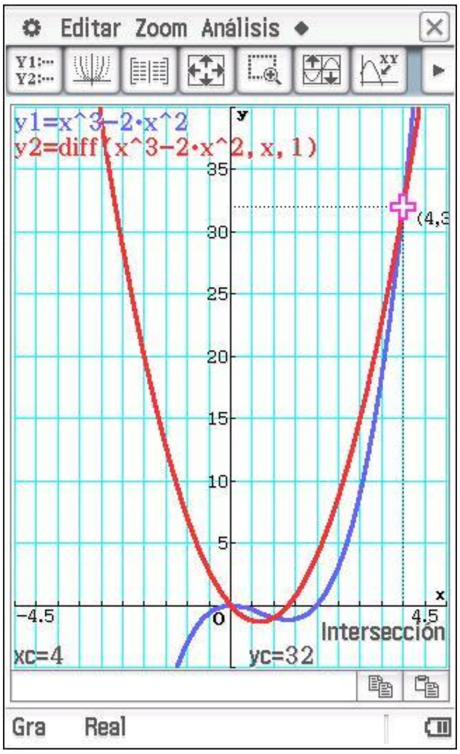
Representem les dues funcions:
Escollim una escala per veure els punts d'intersecció de les dues gràfiques.



Calculem els punts d'intersecció de les dues corbes:



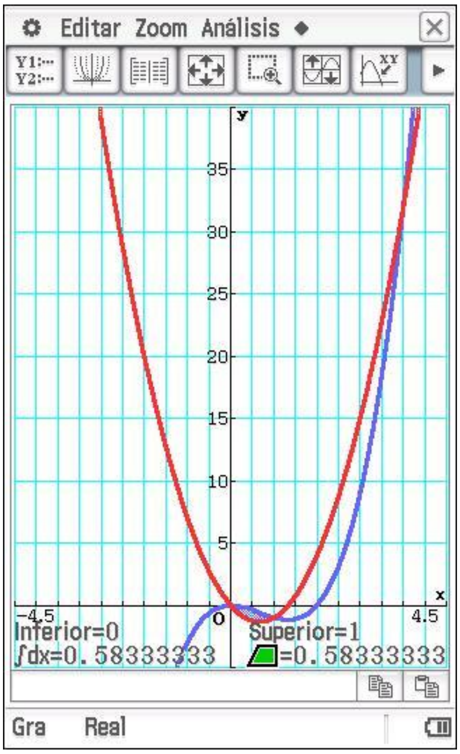


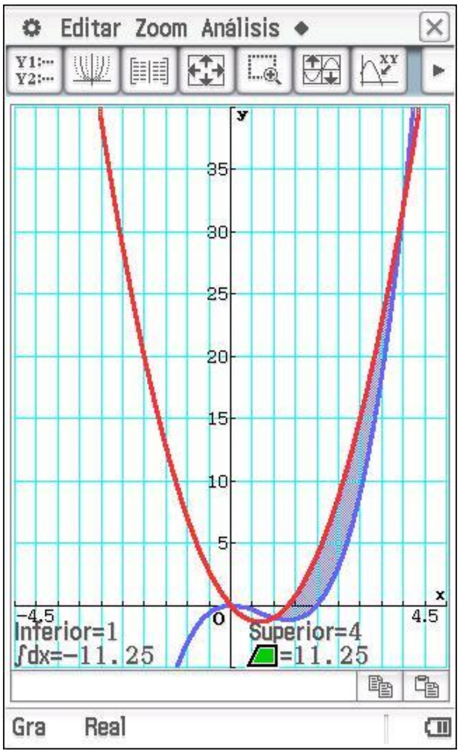


Els punts de tall són: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(4,32)$.

Calculem l'àrea intersecció entre les dues corbes entre $x=0$ y $x=1$.

Calculem l'àrea intersecció entre les dues corbes entre $x=1$ y $x=4$.





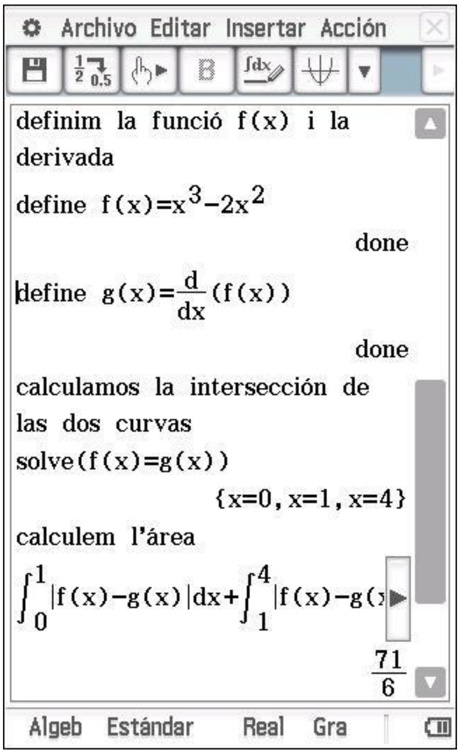
L'àrea buscada és igual a la suma de les dues àrees:

$$S = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}.$$

Solució analítica:

Resolem l'equació $f(x) = f'(x)$.

Definim la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ y $g(x) = \frac{d}{d\,x}\left(x^3 - 2x^2\right)$.



La intersecció de les corbes s'assoleix quan $x = 0, 1, 4$.

L'àrea és:

$$\int_0^1 \left|f(x) - f'(x)\right| dx + \int_1^4 \left|f(x) - f'(x)\right| dx .$$

L'àrea buscada és:

$$S = \frac{71}{6}$$