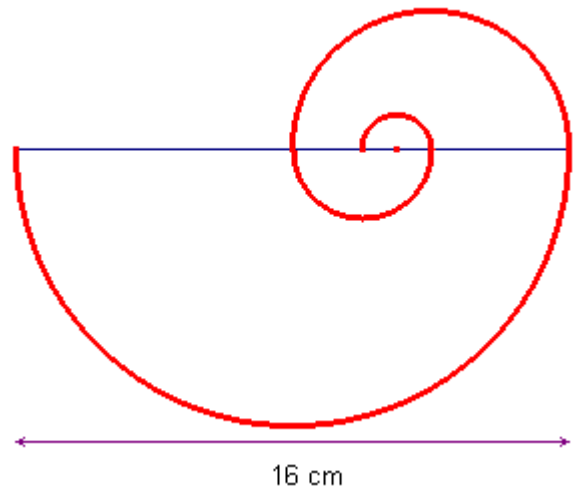


Longitud espiral.

Sobre un segment de 16 cm com diàmetre s'ha dibuixat una semicircumferència.

Després s'ha prolongar mitjançant una semicircumferència de radi la meitat de l'anterior i així successivament.

- Calculeu la longitud total de la figura (4 semicircumferències). Calculeu la longitud total per a 10 semicircumferències.
- Generalitzeu la longitud total per a n semicircumferències.
- Feu una taula de les longituds totals.
- Feu una gràfica de les longituds totals
- Si seguim fins l'infinit quina seria la longitud.



Solució:

La primera semicircumferència mesura:

$$L_1 = 8\pi.$$

La segona semicircumferència mesura:

$$L_2 = 4\pi.$$

La tercer semicircumferència mesura:

$$L_3 = 2\pi.$$

La tercer semicircumferència mesura:

$$L_4 = \pi.$$

Les longituds de les semicircumferències formen una progressió geomètrica de primer terme $L_1 = 8\pi$ i raó $\frac{1}{2}$.

a)

La suma de les 4 primeres semicircumferències és:

$$S_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

Math Rad Norm1 d/c a+bi

15π

47.1238898

JUMP DELETE MAT/VCT MATH

$$S_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 15\pi \approx 47.12 \text{ cm.}$$

Per calcular la suma de les 10 primeres semicircumferències utilitzarem la funció *Suma Finita* de la calculadora:

b)

El terme general de la successió de les longituds de les semicircumferències és:

$$L_n = 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

La suma del n primers termes és:

$$S_n = \frac{L_1 - \frac{1}{2}L_n}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Obrim el *Menú Recursió*:

SEL+S DELETED TYPE n SET TABLE

Construïm la taula dels termes de la successió:

$$S_4 = 16\pi \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 15\pi \approx 47.12 \text{ cm.} \quad S_{10} = 16\pi \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \frac{1024}{64} \pi \approx 50.22 \text{ cm.}$$

També amb successions recurrents.

$$S_{n+1} = S_n + L_{n+1} = S_n + 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Definim en el menú de càlcul $a_0 = 0$.

Math Rad Norm1 d/c | a+bi
 0 → a0 0

JUMP DELETED ▶ MAT/VCT MATH

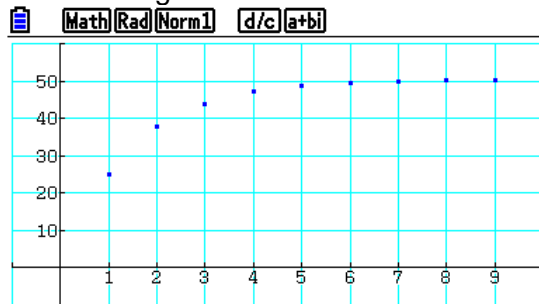
Obrim el *Menú Recursió*n:

Math Rad Norm1 d/c | a+bi
Recurrencia
 $a_{n+1} = a_n + 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$ [—]
 $b_{n+1} :$ [—]
 $c_{n+1} :$ [—]

SEL+S DELETED TYPE n.an''' SET TABLE

d)

Dibuxem la gràfica dels termes de la successió:



Com que la raó de la longitud de les semicircumferències és $r = \frac{1}{2} < 1$ la suma infinita

és: $S_\infty = \frac{L_1}{1 - \frac{1}{2}}$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

<p> <input type="checkbox"/> Math Rad Norm1 d/c a+bi $\frac{8\pi}{1 - \frac{1}{2}}$ <input type="checkbox"/> JUMP DELETED ▶ MAT/VCT MATH </p>	<p> <input type="checkbox"/> Math Rad Norm1 d/c a+bi $\frac{8\pi}{1 - \frac{1}{2}}$ <input type="checkbox"/> 50.26548246 JUMP DELETED ▶ MAT/VCT MATH </p>
--	---

$S_\infty = \frac{L_1}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi \approx 50.27$

Notem que la suma infinita és igual a la longitud de la circumferència de diàmetre 16 cm.