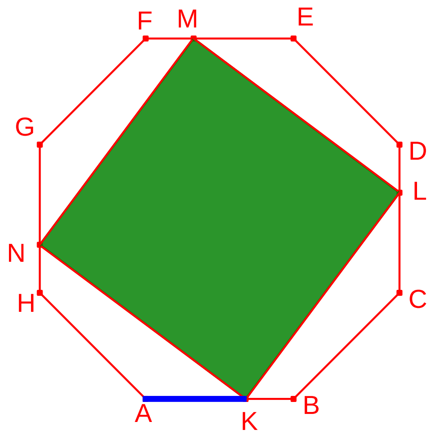
Problema

Siga l'octògon regular ABCDEFGH de costat $\overline{AB} = 1\ cm$
Siga K un punt del costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{AK} = x$
Siga el quadrilàter KLMN tal que L pertany al costat $\overline{CD}$, M pertany al costat $\overline{EF}$ i N pertany al costat $\overline{GH}$ tal que $\overline{AK} = \overline{CL} = \overline{EM} = \overline{GN}$.

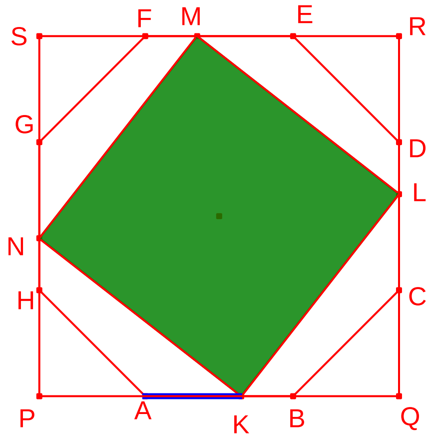


a)
Ompliu la següent taula:

$\overline{AK} = x$ cm	Àrea de KLMN cm^2
0	
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1	
x	

b)
Representeu la funció.
Quin és el domini de la funció?
Quin tipus de funció és? Estudia els seus elements.
c)
Determineu el valor o valors de x a fi que l'àrea de KLMN siga màxima.
d)
Determineu el valor o valors de x a fi que l'àrea de KLMN siga mínima
e)
Determineu el valor de x a fi que l'àrea de KLMN siga 3

Solució:



KLMN és un quadrat.
$\overline{AK} = \overline{GN} = x$, aleshores, $\overline{HN} = 1 - x$
Siga el quadrat PQRS format per les prolongacions dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH}$.
Siga $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CQ} = \overline{DR} = \overline{ER} = \overline{FS} = \overline{GS} = \overline{HP} = y$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APH}$:

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PK} = x + \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{PN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - x\right)$

$\overline{PQ} = 1 + \sqrt{2}.$

L'àrea del quadrat KLMN és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys quatre vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPN}$

$S_{KLMN} = \overline{PQ}^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \overline{PK} \cdot \overline{PN} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$

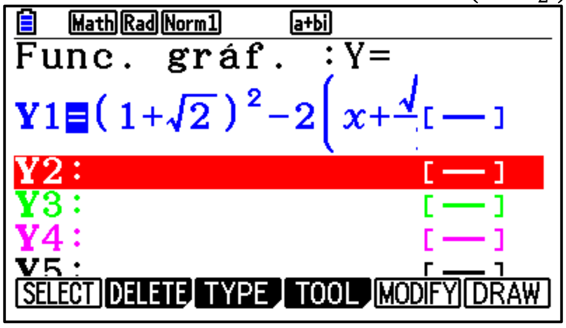
$S_{KLMN} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$

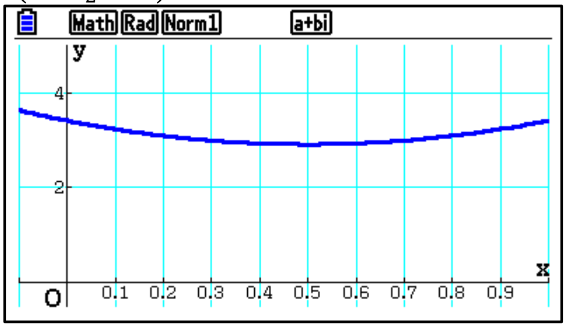
a) b)

El domini de la funció és $[0, 1]$

Obrim el *Menú Gráfico*.

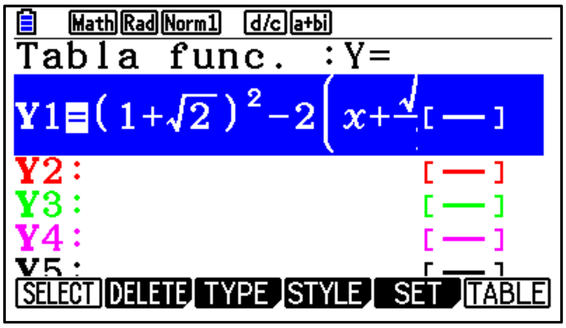
Definim la funció $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$

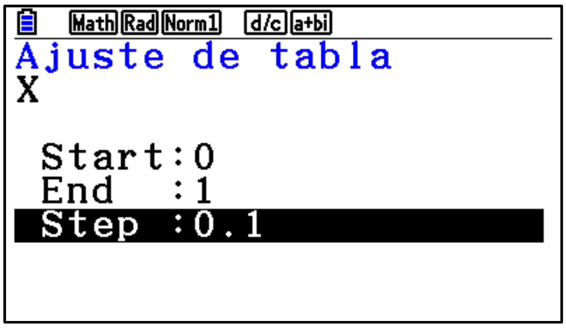


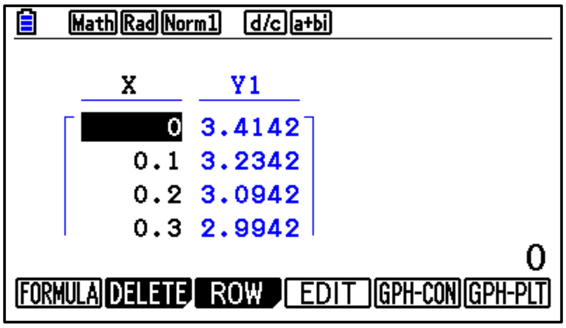


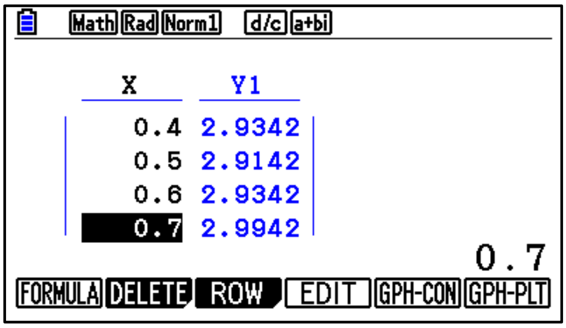
Per determinar la taula obrim el *Menú Tabla*

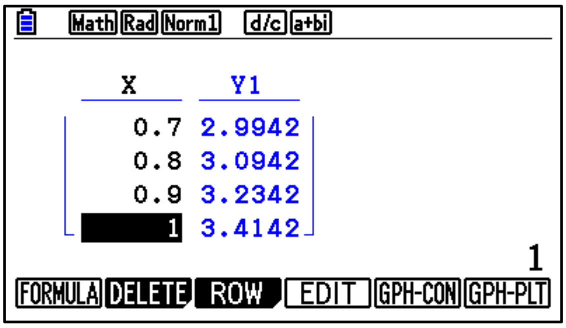
Definim el principi i el final amb la funció *SET*











b) d)

La funció és polinòmica de segon grau. Aleshores és una paràbola.

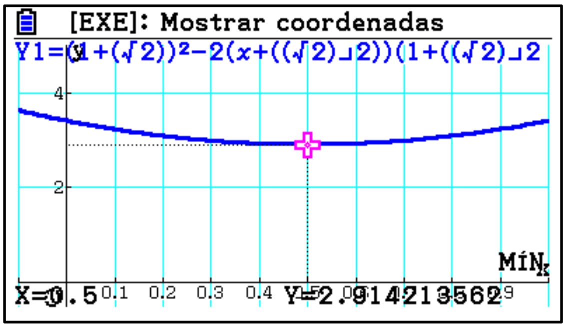
Si simplifiquem l'expressió algebraica:

$y = 2x^2 - 2x + 2 + \sqrt{2}$

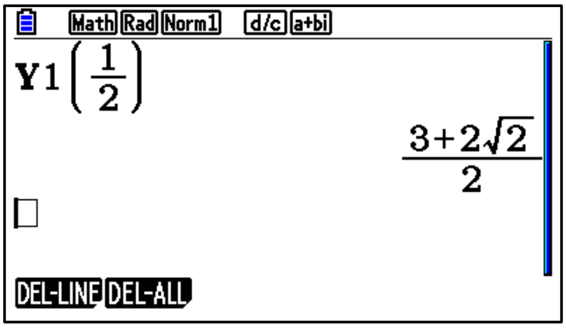
$a = 2 > 0$ La funció és una paràbola còncava.

L'eix de simetria és $x = \frac{1}{2}$

Per calcular el vèrtex, determinarem el mínim de la paràbola.



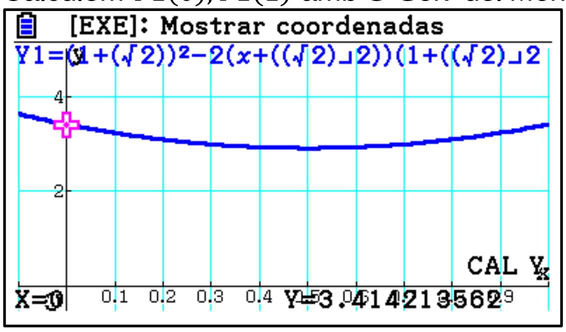
Si volem calcular el valor exacte. Obrim el *Menú Ejec-Mat* i calculem $Y1\left(\frac{1}{2}\right)$

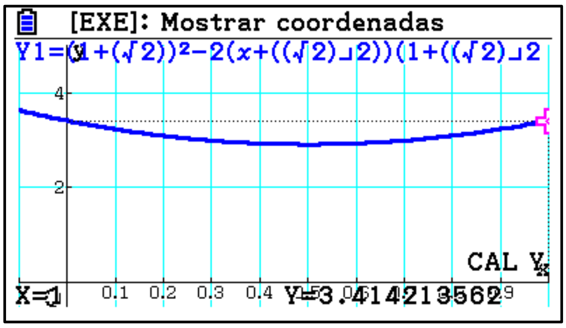


El vèrtex és $V\left(\frac{1}{2},\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$. Aproximadament, $V(0.5,2.9142)$ és el mínim de la funció.

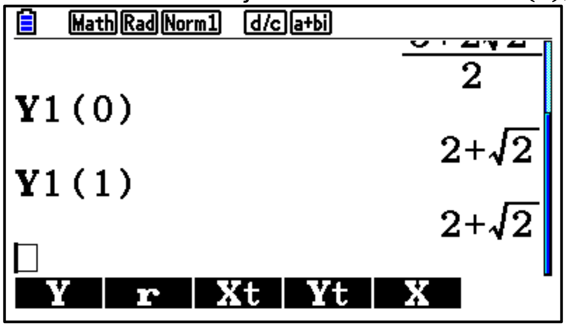
El màxims s'assoleixen en els extrems del domini $x = 0, x = 1$

Calculem $Y1(0), Y1(1)$ amb *G-Solv* del *Menú Gráfico*:





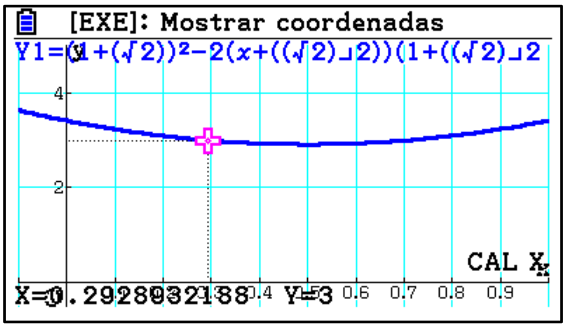
O bé en el *Menú Ejec-Mat* i calculem $Y1(0), Y1(1)$

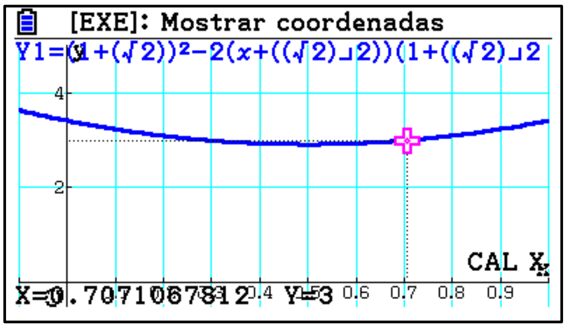


Els màxim s'assoleixen en els punts $(0,\ 2+\sqrt{2}), (1, 2+\sqrt{2})$ o aproximadament, $(0, 3.4142), (1, 3.4142)$

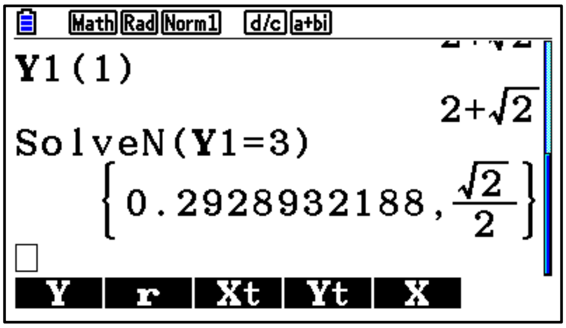
e)

Per calcular el valor de x a fi que l'àrea siga 3 en el *Menú Gráfico*, calcularem $Y1^{-1}(3)$





O bé, amb el *Menú Ejec -Mat* resoldre l'equació Y1=3



El apartat té dues solucions: $x \approx 0.2929, x \approx 0.7071$