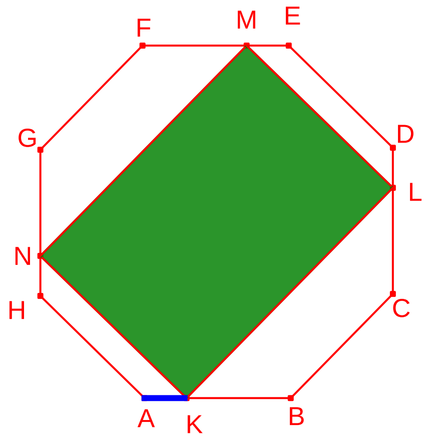
Problema

Siga l'octògon regular ABCDEFGH de costat $\overline{AB} = 1\ cm$
Siga K un punt del costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{AK} = x$
Siga el quadrilàter KLMN tal que L pertany al costat $\overline{CD}$, M pertany al costat $\overline{EF}$ i N pertany al costat $\overline{GH}$ tal que $\overline{AK} = \overline{DL} = \overline{EM} = \overline{HN}$.

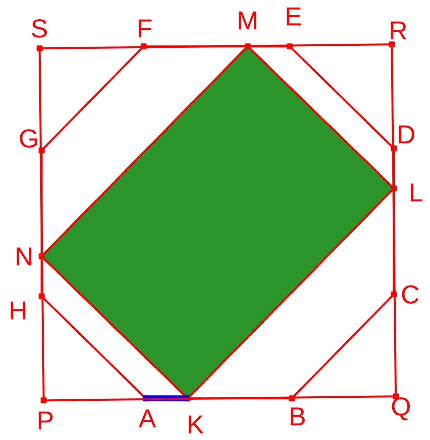


a)
Ompliu la següent taula:

$\overline{AK} = x$ cm	Àrea de KLMN cm^2
0	
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1	
x	

b)
Representeu la funció.
Quin és el domini de la funció?
Quin tipus de funció és. Estudia els seus elements?
c)
Determineu el valor o valors de x a fi que l'àrea de KLMN siga màxima.
d)
Determineu el valor o valors de x a fi que l'àrea de KLMN siga mínima
e)
Determineu el valor de x a fi que l'àrea de KLMN siga 2.75

Solució:



KLMN és un rectangle.
$\overline{AK} = \overline{GN} = x$, aleshores, $\overline{BK} = \overline{CL} = 1 - x$
Siga el quadrat PQRS format per les prolongacions dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH}$.
Siga $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CQ} = \overline{DR} = \overline{ER} = \overline{FS} = \overline{GS} = \overline{HP} = y$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APH}$:

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PK} = \overline{PN} = x + \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{QK} = \overline{QL} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - x\right)$

$\overline{PQ} = 1 + \sqrt{2}.$

L'àrea del rectangle KLMN és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys dues vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPN}$ i dues vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KQL}$

$$S_{KLMN} = \overline{PQ}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\overline{PK}^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\overline{QK}^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2$$

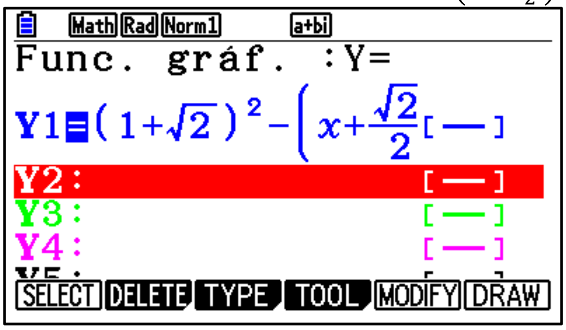
$$S_{KLMN} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2$$

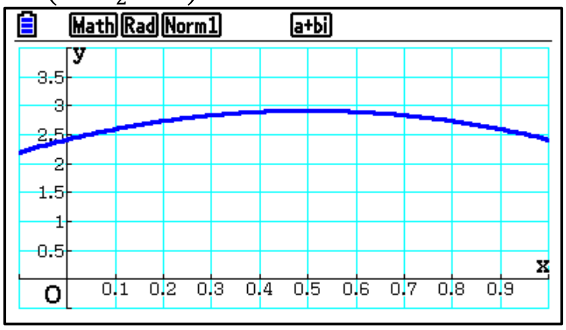
a) b)

El domini de la funció és $[0, 1]$

Obrim el *Menú Gráfico*.

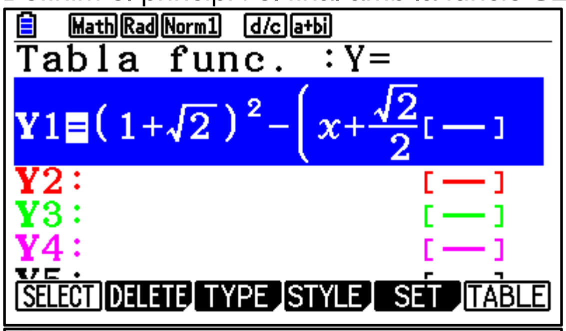
Definim la funció: $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2$

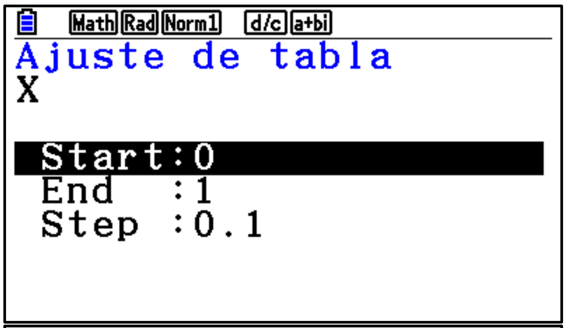


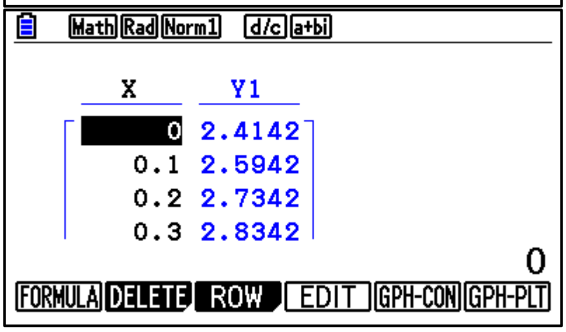


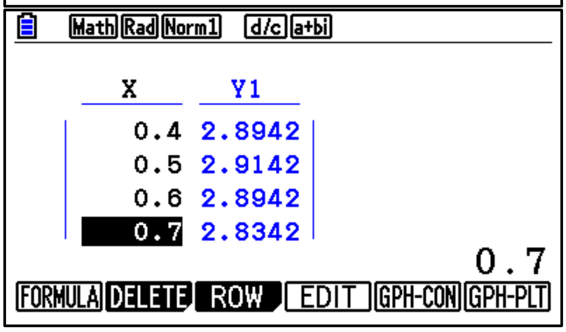
Per determinar la taula obrim el *Menú Tabla*

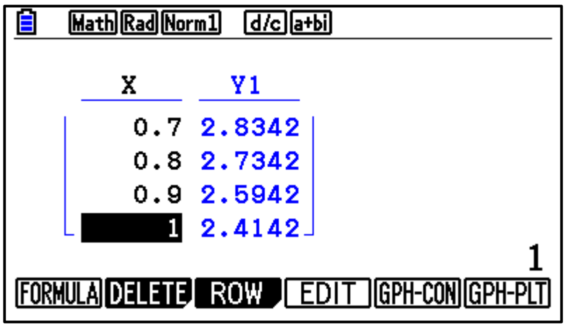
Definim el principi i el final amb la funció *SET*



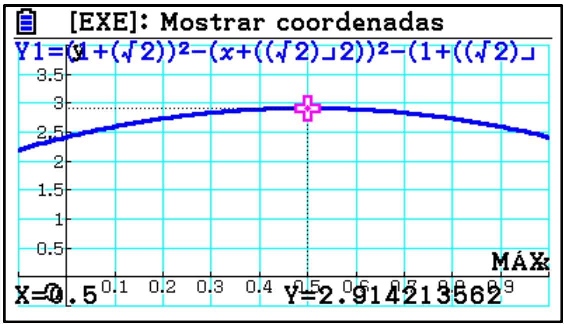




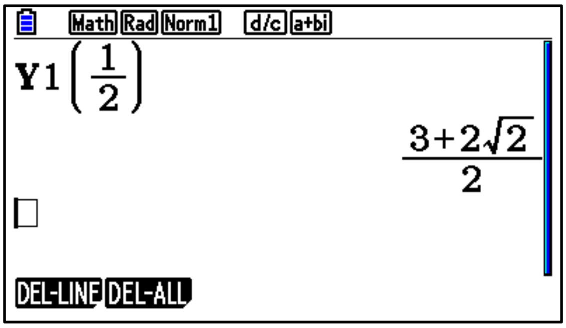




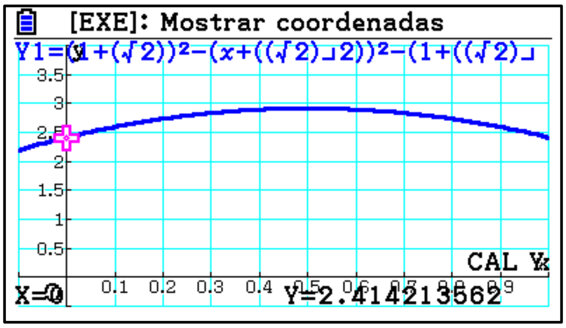
La funció és polinòmica de segon grau. Aleshores és una paràbola.
Si simplifiquem l'expressió algebraica:
$y = -2x^2 + 2x + 1 + \sqrt{2}$
$a = -2 < 0$ La funció és una paràbola còncava.
L'eix de simetria és $x = \frac{1}{2}$
Per calcular el vèrtex, determinarem el màxim de la paràbola.

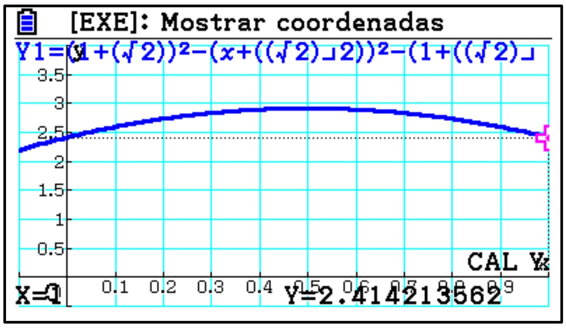


Si volem calcular el valor exacte. Obrim el *Menú Ejec-Mat* i calculem $Y1\left(\frac{1}{2}\right)$

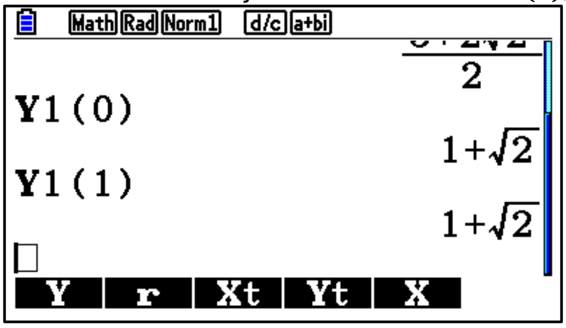


El vèrtex és $V\left(\frac{1}{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$. Aproximadament, $V(0.5{,}2.9142)$ és el mínim de la funció.
El mínims s'assoleixen en els extrems del domini $x = 0, x = 1$
Calculem $Y1(0), Y1(1)$ amb *G-Solv* del *Menú Gráfico*:



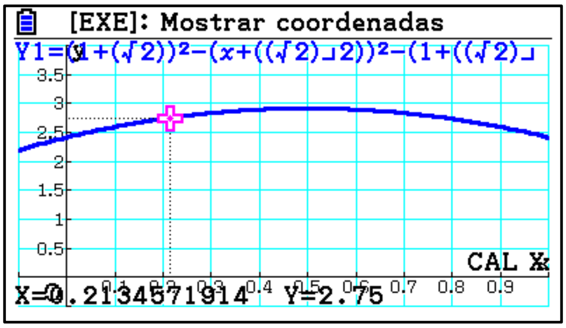


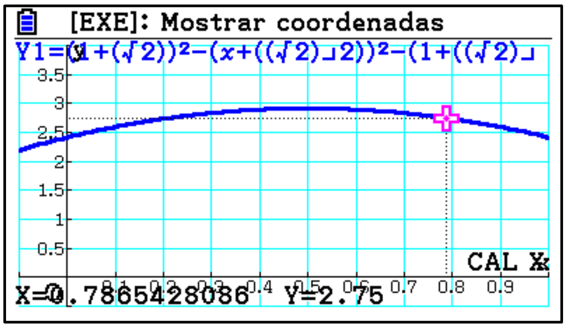
O bé en el *Menú Ejec-Mat* i calculem $Y1(0), Y1(1)$



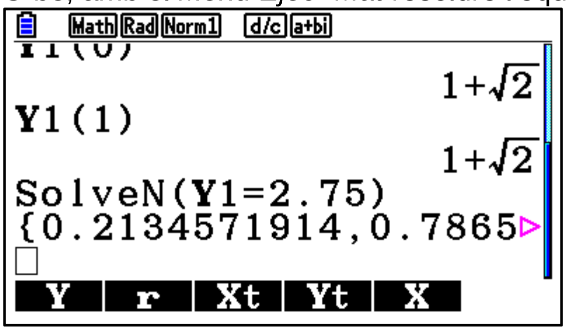
Els màxim s'assoleixen en els punts $(0,\ 1+\sqrt{2}), (1, 1+\sqrt{2})$ o aproximadament, $(0, 2.4142), (1, 2.4142)$

Per calcular el valor de x a fi que l'àrea siga 3 en el *Menú Gráfico*, calcularem $Y1^{-1}(2.75)$





O bé, amb el *Menú Ejec -Mat* resoldre l'equació Y1=2.75



El apartat té dues solucions: $x \approx 0.2135, x \approx 0.7865$