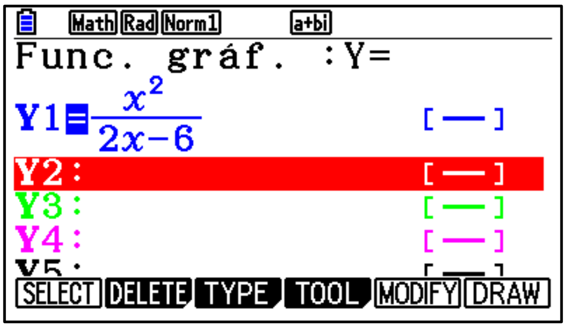
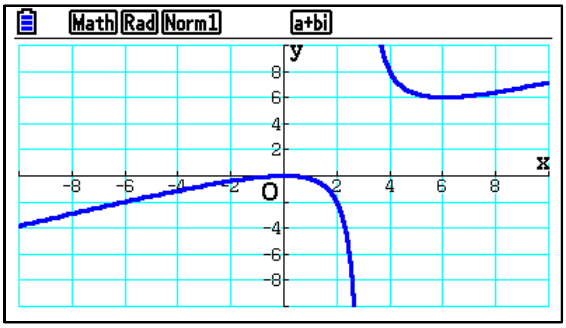
Siga la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-6}$.

a) Determineu el domini, les asímptotes, si existeixen, de la funció.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius, si existeixen, d'aquesta funció.
Aragó 2014.

Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico*

Definim la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-6}$





El domini de la funció és:
$Dom\, f(x) = \mathbb{R} \sim \{x \,/\, 2x-6=0\} = \mathbb{R} \sim \{3\}$

Les asímptotes.
$x = 3$ és una asímptota vertical.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{2x-6} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{2x-6} = -\infty$$

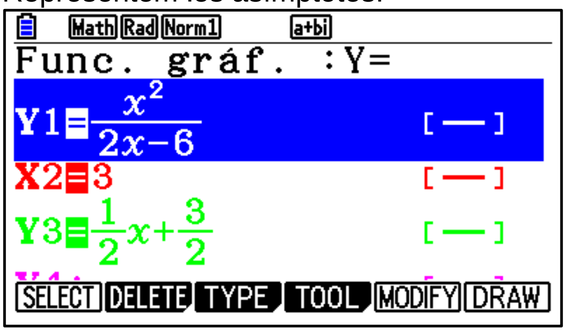
$$\frac{x^2}{2x-6} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{9}{2x-6}$$

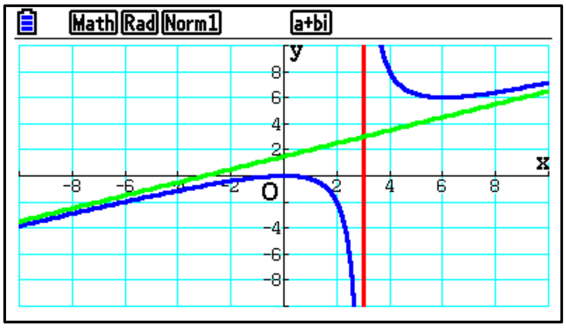
Aleshores l'asímptota horitzontal és.

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

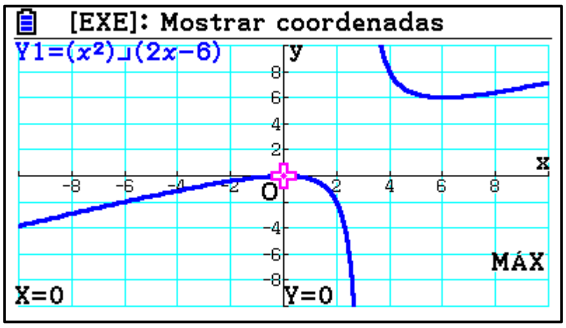
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{9}{2x-6} = 0^+\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{9}{2x-6} = 0^-$$

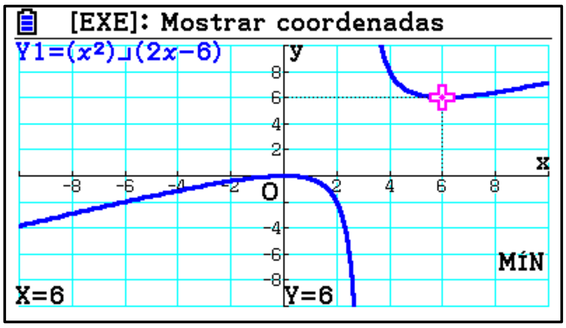
Aleshores, la corba va per dalt de l'asímptota quan x s'aproxima a més infinit. La corba va per sota de l'asímptota quan x s'aproxima a menys infinit
Definim les funcions $x = 3, y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
Representem les asímptotes:





b)
Per calcular el màxim i el mínim relatius de la funció utilitzem la funció *G-Solv*:

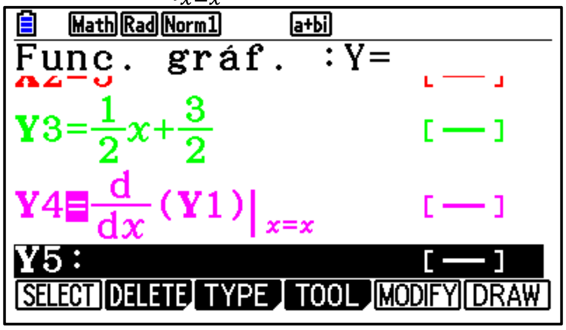


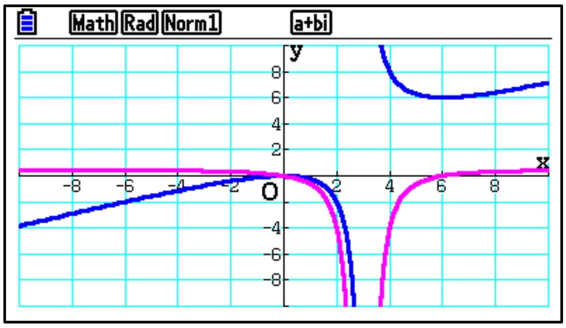


El màxim s'assoleix en el punt $(0,0)$
El mínim s'assoleix en el punt (6, 6)

Per estudiar la manotonia de la funció calculem el signe de la primera derivada.
Definim la funció derivada de la funció $f(x) = \frac{x^2}{2x-6}$

$Y4 = \frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x}$





La funció derivada és positiva quan $x \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$
En aquest interval la funció és creixent.

La funció derivada és negativa quan $x \in]0,6[\sim\{3\}$
En aquest interval la funció és decreixent.

Si $x = 0$ la funció és contínua i passa de creixent a decreixent. Aleshores, $x = 0$ és un màxim relatiu estricte.

Si $x = 6$ la funció és contínua i passa de decreixent a creixent. Aleshores, $x = 6$ és un mínim relatiu estricte.

b)
Siga $f(x) = \frac{x^2}{2x-6}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 12x}{(2x-6)^2}$

$f'(x) = 0$, quan $x = 0, 6$

$f'(x) > 0$ quan $2x^2 - 12x > 0$ resolent la inequació:
La funció derivada és positiva quan $x \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$
En aquest interval la funció és decreixent.

$f'(x) < 0$ quan $2x^2 - 12x < 0$ resolent la inequació:

La funció derivada és negativa quan $x \in \,]0,6[\sim\{3\}$
En aquest interval la funció és decreixent.

Si $x = 0$ la funció és contínua i passa de creixent a decreixent. Aleshores, $x = 0$ és un màxim relatiu estricte.

Si $x = 6$ la funció és contínua i passa de decreixent a creixent. Aleshores, $x = 6$ és un mínim relatiu estricte.