

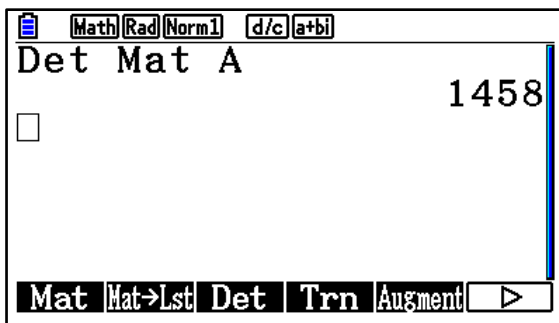
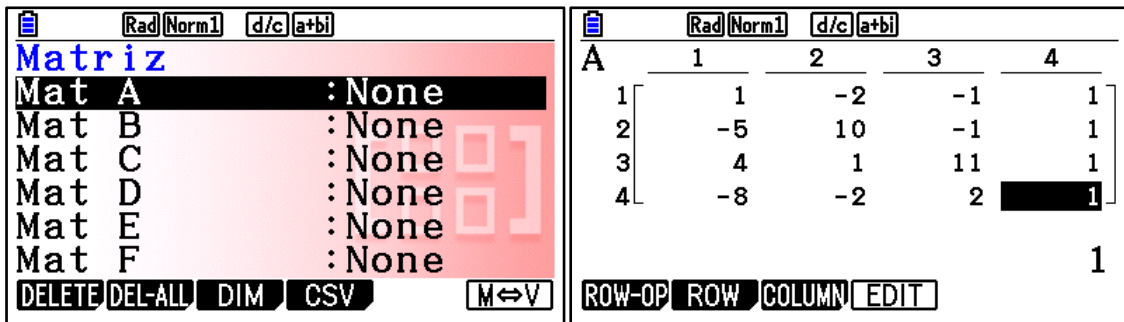
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(1, -2, -1), B(-5, 10, -1), C(4, 1, 11), D(-8, -2, 2)$

Solució 1:

Vegem que els quatre punts no són coplanaris.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Vegem que el determinant de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ -8 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ és distint de zero.



Calculem els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

El punt mig del segment \overline{AB} és $E(-2, 4, -1)$

El punt mig del segment \overline{AC} és $F\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 5\right)$

El punt mig del segment \overline{AD} és $G\left(\frac{-7}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -12, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 3, 12)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-9, 0, 3)$$

El plànol mediador del segment \overline{AB} té equació:

$$\Pi_1 \equiv (x + 2) + 2(y - 4) = 0$$

$$\Pi_1 \equiv x + 2y = 6$$

El plànol mediador del segment \overline{AC} té equació:

$$\Pi_2 \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + 4(z - 5) = 0$$

$$\Pi_2 \equiv x + y + 4z = 22$$

El plànol mediador del segment \overline{AD} té equació:

$$\Pi_3 \equiv -3\left(x + \frac{7}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Pi_3 \equiv -3x + z = 11$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol.

Obrim el *Menú Ecuación*:

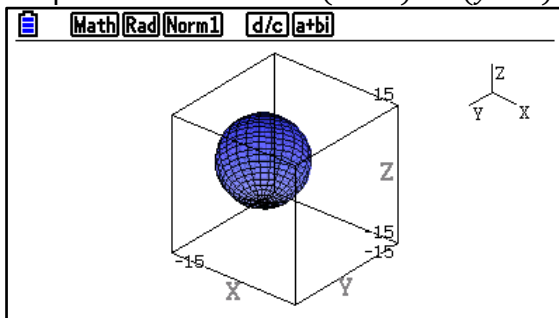
El centre de l'esfera és el punt $O(-2, 4, 5)$

El radi de l'esfera és:

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-4)^2 + (-1-5)^2}$$

El radi de l'esfera és $r = 9$

L'equació de l'esfera és $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$



Solució 2

L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Substituïm les coordenades dels quatre punts en l'equació general i resollem el sistema format per les 4 equacions amb les incògnites A, B, C, D .

Obrim el Menú Ecuación:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <h3 style="margin: 0;">Ecuación</h3> <p style="margin: 5px 0;">Seleccionar tipo $x^2 + bx + c = 0$</p> <p style="margin: 2px 0;">F1: Simultáneo</p> <p style="margin: 2px 0;">F2: Polinomio</p> <p style="margin: 2px 0;">F3: Resolver</p> <p style="margin: 2px 0; font-weight: bold;">SIMUL POLY SOLVER</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <h3 style="margin: 0;">Simultáneo</h3> <p style="margin: 2px 0;">Datos en memoria</p> <p style="margin: 20px 0; text-align: center;">Incógnitas: 3</p> <p style="margin: 2px 0;">¿Número incógnitas?</p> <p style="margin: 2px 0; text-align: center;"> 2 3 4 5 6 </p>
---	---

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <h3 style="margin: 0;">$a_n X + b_n Y + C_n Z + d_n T = e_n$</h3> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 10%; text-align: center;">d</th> <th style="width: 5%; text-align: center;">→</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-5</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </tbody> </table> <p style="margin-top: 5px; font-weight: bold;">SOLVE DELETE CLEAR EDIT</p>		a	b	c	d	→	1	1	-2	-1	1		2	-5	10	-1	1		3	4	1	11	1		4	-8	-2	2	1	1	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <h3 style="margin: 0;">$a_n X + b_n Y + C_n Z + d_n T = e_n$</h3> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: center;">X</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Y</td> <td style="text-align: center;">-8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Z</td> <td style="text-align: center;">-10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">T</td> <td style="text-align: center;">-36</td> </tr> </table> <p style="margin-top: 5px; text-align: right; font-weight: bold;">4</p> <p style="margin-top: 5px; font-weight: bold;">REPEAT</p>	X	4	Y	-8	Z	-10	T	-36
	a	b	c	d	→																																		
1	1	-2	-1	1																																			
2	-5	10	-1	1																																			
3	4	1	11	1																																			
4	-8	-2	2	1	1																																		
X	4																																						
Y	-8																																						
Z	-10																																						
T	-36																																						

La solució és:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = -8 \\ C = -10 \\ D = -36 \end{cases}$$

L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 10z - 36 = 0$$

Completant quadrats:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36 + 2^2 + 4^2 + 5^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$$

El centre de l'esfera és el punt $O(-2, 4, 5)$ i el radi $r = 9$