

Calculeu la distància més curta del punt  $A(1, -1, 3)$  a l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$$

En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.

Solució

Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 62 + 9 + 4 + 25 = 10^2$$

Les coordenades del centre de l'esfera és  $O(3, -2, 5)$  i el radi  $R = 10$

Estudiem la posició relativa del punt  $A(1, -1, 3)$  respecte de l'esfera.

$$(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2 = 9 < 10^2$$

El punt  $A(1, -1, 3)$  és interior a l'esfera

$$\overline{OA} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2} = 3$$

La distància més curta és:

$$d_{\min} = R - \overline{OA} = 10 - 3 = 7$$

La distància més llarga és:

$$d_{\max} = R + \overline{OA} = 10 + 3 = 13$$

$$\overrightarrow{OA} = (-2, 1, -2)$$

L'equació de la recta que passa pels punts  $O$  i  $A$  és:

$$r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$$

Un punt qualsevol de la recta  $r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$  té coordenades:

$$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$$

Determinem la intersecció de la recta i l'esfera. Substituïm les coordenades del punt

$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$  en l'equació de l'esfera:

$$(-2\alpha)^2 + \alpha^2 + (-2\alpha)^2 = 100 \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\alpha = \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{10}{3}$$

$$P_1\left(\frac{-11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

$$\overline{AP_1} = \sqrt{\left(\frac{-11}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{-5}{3} - 3\right)^2} = 7$$

$$P_1\left(\frac{-17}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right) \text{ és el punt més proper de A.}$$

$$\alpha = -\frac{10}{3}$$

$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right)$$

$$\overline{AP_2} = \sqrt{\left(\frac{29}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{-16}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{35}{3} - 3\right)^2} = 13$$

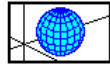
$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right) \text{ és el punt més allunyat de A.}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera i la recta

**Math** **Rad** **Norm1** **d/c** **a+bi**

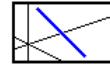
$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$$



a	b	c	r
3	-2	5	10

**Math** **Rad** **Norm1** **d/c** **a+bi**

Punto de paso  $(X_0, Y_0, Z_0)$   
Vector dirección  $[a, b, c]$



$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
1	-1	3

a	b	c
-2	1	-2

10

-2

**FACTOR** **EXPAND** **EDIT**

**SET**

**EXPRESS** **VECTOR** **P&V**

**POINTS**

**EDIT**

**SET**

**Math** **Rad** **Norm1** **d/c** **a+bi**

