

Determineu l'equació de l'esfera de radi $\sqrt{6}$ tangent al plànel $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ en el punt de coordenades $(1, 0, 2)$.

Solució:

El punt $P(1, 0, 2)$ pertany al plànel ja que $1 + 2 \cdot 0 - 2 + 1 = 0$.

El centre de l'esfera pertany a la recta perpendicular al plànel π que passa pel punt $P(1, 0, 2)$.

El vector director de la recta és el característic del plànel $a = (1, 2, -1)$

L'equació de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:

$$A(1 + \mu, 2\mu + 2 - \mu)$$

$$d(A, r) = \sqrt{6}$$

$$\left| \frac{1 + \mu + 2(2\mu) - (2 - \mu) + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \sqrt{6}$$

Simplificant:

$$|6\mu| = 6$$

Resolent l'equació:

$$\mu = 1, -1$$

El problema té dues solucions:

Si $\mu = 1$ el centre de l'esfera és el punt $O_1(2, 2, 1)$

L'equació de l'esfera és:

$$E_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$$

Si $\mu = -1$ el centre de l'esfera és el punt $O_2(0, -2, 3)$

L'equació de l'esfera és:

$$E_2 \equiv (x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem el plànel i les dues esferes.

The image shows two side-by-side screenshots of a 3D calculator interface. The left screenshot displays the equation editor for a plane, $aX+bY+cZ+d=0$, with input fields for coefficients $a=1$, $b=2$, $c=-1$, and $d=1$. The right screenshot displays the equation editor for a sphere, $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$, with input fields for coefficients $a=2$, $b=2$, $c=1$, and radius $r=2.4494$. Both screens include buttons for 'EXPRESS', 'VECTOR', 'POINTS', 'EDIT', and 'SET'.

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

0 -2 3 2.4494

2.449489743

