

Donades les rectes d'equacions

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - 2z = -5 \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$$

es demana:

- Justificar que les rectes r i s es creuen.
 - Calcular raonadament la distància entre les rectes r i s .
 - Determinar l'equació del pla π que és paral·lel i equidistant a les rectes r i s .
- Pau's, València juny 2010*

Solució:

Passem les rectes r, s a la forma paramètrica.

Obrim el *Menú Ecuación*

Resolem el sistema format per les equacions de r :

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi $a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 20%; text-align: center;">a</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">b</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">c</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">1</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> SOLVE DELETE CLEAR EDIT </div> </div>		a	b	c	d	1	5	1	-1	4	2	2	-2	-2	-5	3	0	0	0	0	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi $a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$ $X = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}Z$ $Y = \frac{11}{4} - \frac{2}{3}Z$ $Z = Z$ <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> REPEAT </div> </div>
	a	b	c	d																	
1	5	1	-1	4																	
2	2	-2	-2	-5																	
3	0	0	0	0																	

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{4} + \alpha \\ y = \frac{11}{4} - 2\alpha \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

Un punt de la recta r és $P\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, 0\right)$ i el vector director $v_r = (1, -2, 3)$

La recta s en forma paramètrica és:

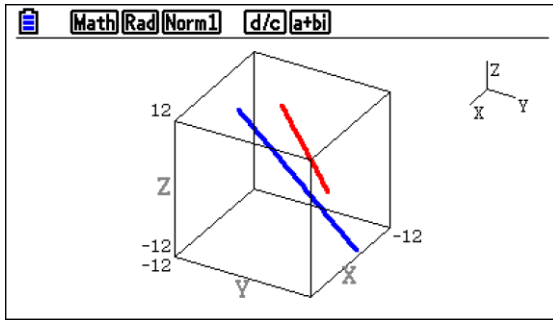
$$s \equiv \begin{cases} x = -5 + \beta \\ y = \beta \\ z = 4 \end{cases}$$

Un punt de la recta s és $Q(-5, 0, 4)$ i el vector director $v_s = (1, 1, 0)$

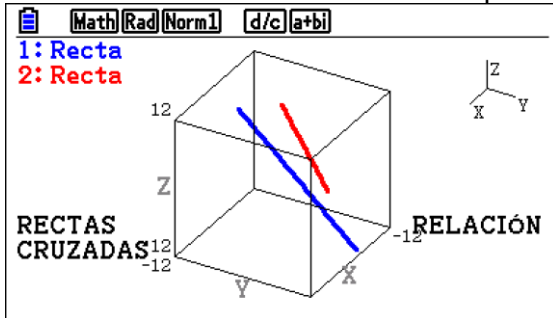
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les dues rectes:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c] <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">Xo</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Yo</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[0.25</td> <td style="text-align: center;">2.75</td> <td style="text-align: center;">0]</td> </tr> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">a</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">b</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[1</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">3]</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> 3 </div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;"> EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET </div> </div>	Xo	Yo	Zo	[0.25	2.75	0]	a	b	c	[1	-2	3]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c] <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">Xo</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Yo</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-5</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">4]</td> </tr> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">a</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">b</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0]</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> 0 </div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;"> EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET </div> </div>	Xo	Yo	Zo	[-5	0	4]	a	b	c	[1	1	0]
Xo	Yo	Zo																							
[0.25	2.75	0]																							
a	b	c																							
[1	-2	3]																							
Xo	Yo	Zo																							
[-5	0	4]																							
a	b	c																							
[1	1	0]																							



Amb la funció *G-Solv* determinem la posició relativa de les dues rectes.



Les rectes es creuen

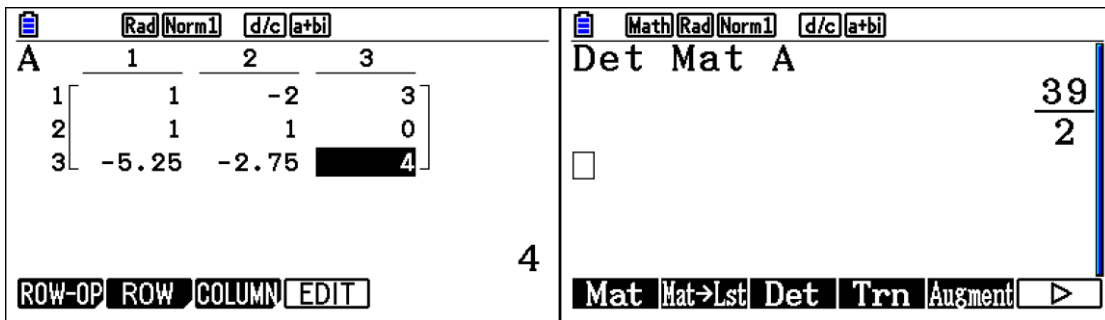
Els vectors $\{v_r, v_s\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}, 4\right)$$

Per estudiar la linealitat dels vectors $\{v_r, v_s, \overrightarrow{PQ}\}$ calculem el determinant format pels tres vectors.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim la matriu formada pels tres vectors i calculem el seu determinant.



El determinant és distint de zero. Aleshores, les dues rectes es creuen.

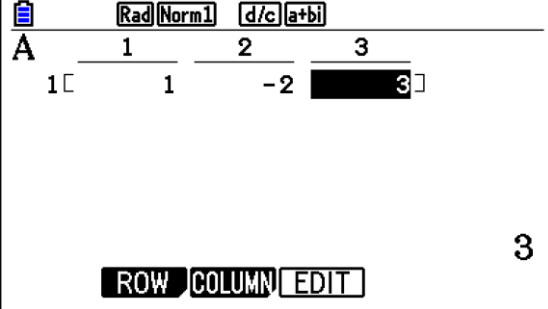
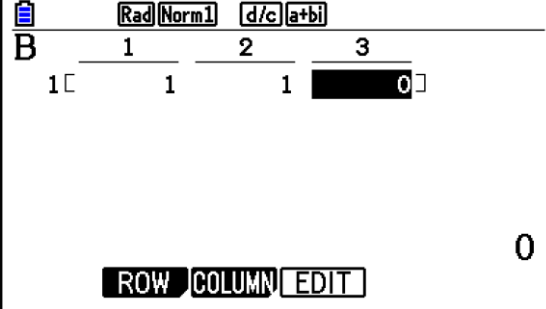
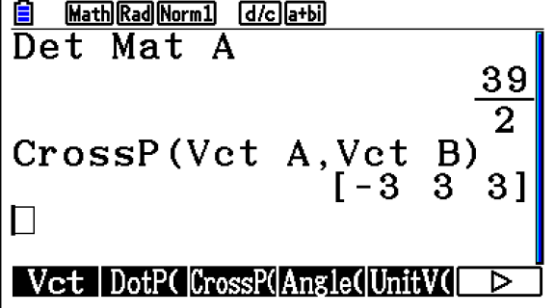
b)

La distància entre les dues rectes és:

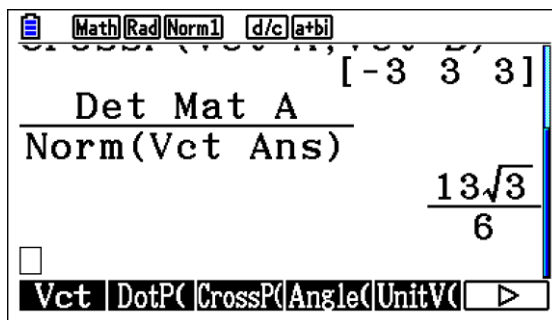
$$d(r, s) = \frac{\| [v_r, v_s, \overrightarrow{PQ}] \|}{\| v_r \times v_s \|}$$

Calculem $v_r \times v_s$

Definim els dos vectors.

 <p>Calculator screen showing matrix A: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. The number 3 is displayed at the bottom right.</p>	 <p>Calculator screen showing matrix B: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. The number 0 is displayed at the bottom right.</p>
 <p>Calculator screen showing: Det Mat A = $\frac{39}{2}$. CrossP(Vct A, Vct B) = $[-3 \ 3 \ 3]$.</p>	

Calculem la distància entre les rectes:



Calculator screen showing the calculation of the distance between two lines: $\frac{\text{Det Mat A}}{\text{Norm(Vct Ans)}} = \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

La distància és

$$d(r, s) = \frac{13\sqrt{3}}{6}$$

c)

El plànel que cerquem té per direcció $\{v_r, v_s\}$ i passa pel punt mig del segment \overline{PQ}

El punt mig té coordenades:

$$M\left(-\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, 2\right).$$

L'equació del plànel és:

$$\pi \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, 2\right) + (1, -2, 3)\alpha + (1, 1, 0)\beta$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel junt amb les dues rectes.

Math Rad Norm1 d/c | a+bi

$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$

\vec{r}_0	\vec{u}	\vec{v}
X $\begin{bmatrix} -2.375 \\ 1.375 \\ 2 \end{bmatrix}$	X $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$	X $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

0

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c | a+bi

Amb la funció G-Solv determinem la posició relativa recta-plànel.

Math Rad Norm1 d/c | a+bi

2: Recta
3: Plano

PARALELO RELACIÓN

Next Back

Math Rad Norm1 d/c | a+bi

1: Recta
3: Plano

PARALELO RELACIÓN

Next Back