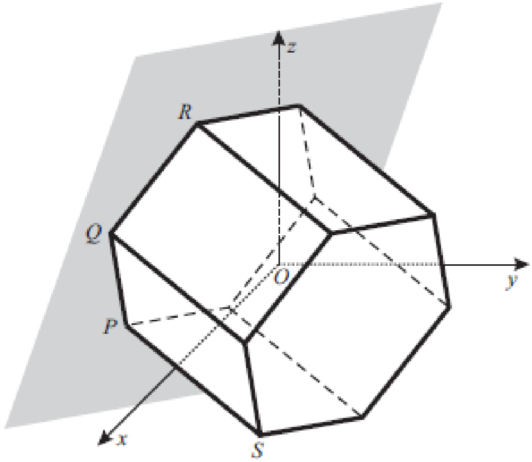
Problema. Geometria 3D



En la figura de la dreta, està representat en el sistema de referència O_{xyz} un prisma hexagonal regular.
$\overline{PQ}, \overline{QR}$ són arestes de la base del prisma.
$\overline{PQ} = 4$

a) Calculeu $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$
b) Se sap que el plànol *PQR* té equació $2x + 3y - z - 15 = 0$, una de les arestes laterals és $\overline{PS}$ on les coordenades del vèrtex S són $P(14, 5, 0)$.
Determineu l'àrea lateral del prisma.
Calcula l'àrea total del prisma.
c) Calculeu les coordenades del vèrtex *P*.
d) El volum del prisma
e) Si s'escullen dos vèrtexs de cadascuna de les bases del prisma, calculeu la probabilitat que aquests quatre vèrtexs formen una cara lateral del prisma.

Solució:

a) b)

El producte escalar ordinari:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{QP}\| \cdot \|\overrightarrow{QR}\| \cdot cos120° = 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

b)

L'aresta $\overline{PS}$ és perpendicular a la base que pertany al plànol $\pi \equiv 2x + 3y - z - 15 = 0$
Les cares laterals són 6 rectangles iguals de costats $\overline{PQ} = 4, \widehat{PS}$

$$\overline{PS} = d(S, \pi) = \left|\frac{2 \cdot 14 + 3 \cdot 5 - 0 - 15}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

L'àrea lateral del prisma és:

$$S_L = 6(4 \cdot 2\sqrt{14}) = 48\sqrt{14}$$

L'àrea de la base és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat 4.

$$S_b = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2\right) = 24\sqrt{3}$$

L'àrea total del prisma és igual a la suma de les àrees de dues bases i l'àrea lateral.

$$S_T = 2(24\sqrt{3}) + 48\sqrt{14} = 48(\sqrt{3} + \sqrt{14})$$

d)

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = S_b \cdot \overline{PS} = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{14} = 48\sqrt{52}$$

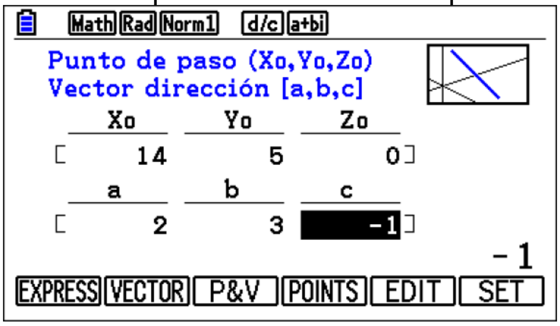
c)

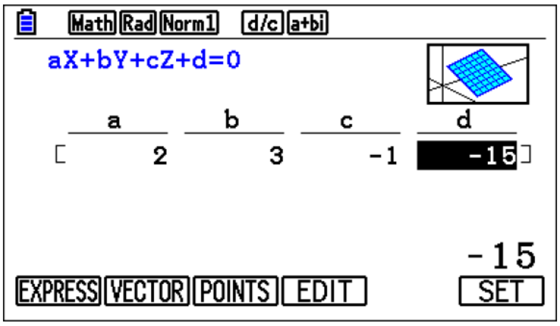
La recta PS és perpendicular al plànol $\pi \equiv 2x + 3y - z - 15 = 0$
El vector director de la recta és el característic del plànol $a = (2, 3, -1)$
L'equació paramètrica de la recta és:

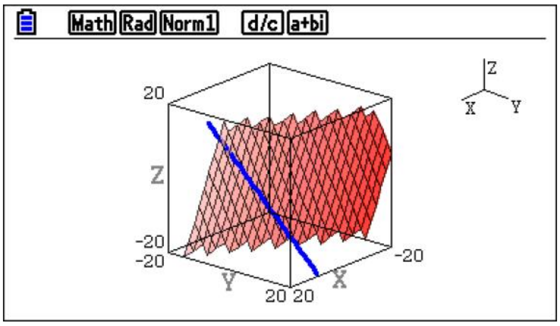
$$r \equiv \begin{cases} x = 14 + 2\alpha \\ y = 5 + 3\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

El punt P és igual a la intersecció de la recta i el plànol.

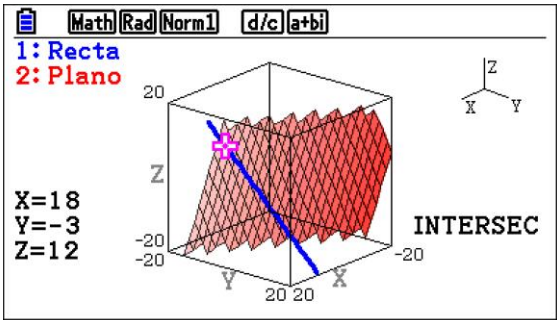
Obrim el *Menú Gráfico 3D.*
Definim i representem la recta i el plànol.







Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció.



Les coordenades del punt P són $P(18, -3, 12)$
Notem que $\overline{PS} = \|\overrightarrow{PS}\| = \|(-4,8,12)\| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 12^2} = 2\sqrt{14}$

d)
Casos favorables de l'experiment 6, ja que només hi ha 6 cares distintes.
Casos possibles $C_{6,2} \cdot C_{6,2}$

La probabilitat del succés és:
$$P = \frac{6}{C_{6,2} \cdot C_{6,2}} = \frac{2}{75}$$