

En la figura, està representat en un sistema de referència O_{xyz} una piràmide quadrangular regular $ABCDV$.

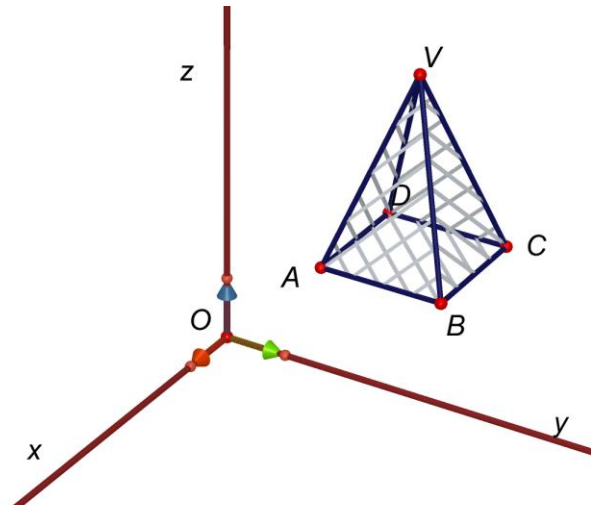
Sabem que:

$ABCD$ és la base paral·lela al pla xOy

$A(-1, 1, 1), C(-3, 3, 1)$

El pla BCV està definit per l'equació

$$3y + z - 10 = 0$$



- Doneu la condició que defineix la superfície esfèrica de centre A i tangent al pla xOy . Escriu la seua equació.
- Determineu les coordenades del vèrtex V .
- Siga el pla π perpendicular a l'aresta \overline{AC} i que passa pel punt $P(1, -2, 1)$. Proveu que els plans π, BCV s'intersecten en una recta. I determineu la seua equació vectorial.
- Calculeu les coordenades dels vèrtexs B i D .
- Calculeu l'àrea total de la piràmide.
- Calculeu el volum de la piràmide.

Solució:

a)

L'equació del pla que conté la base és, paral·lel al pla $z = 0$ té equació:

$$ABCD \equiv z - 1 = 0$$

La distància del centre A al pla $O_{xyz} \equiv z = 0$ és 1 .

El radi de l'esfera tangent és $r = 1$.

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera i el pla O_{xyz}

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$</p> <p>$\frac{a}{-1} \quad \frac{b}{1} \quad \frac{c}{1} \quad \frac{r}{1}$</p> <p>1</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>$aX+bY+cZ+d=0$</p> <p>$\frac{a}{0} \quad \frac{b}{0} \quad \frac{c}{1} \quad \frac{d}{0}$</p> <p>0</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>
<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p>	

b)

Per ser la piràmide regular quadrangular la projecció de V sobre la base, és el centre del quadrat $ABCD$

El centre del quadrat té coordenades:

$$M(-2, 2, 1)$$

La recta altura de la piràmide passa pels punts M, V passa per V i té direcció el vector característic de $O_{xyz} \equiv z = 0, a = (0, 0, 1)$

la seua equació és:

$$r_{MV} \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Per calcular les coordenades del vèrtex V resollem el sistema format pel plànel

$$BCV \equiv 3y + z - 10 = 0 \text{ i la recta } r_{MV} \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}, r_{MV} \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + z = 10 \\ x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

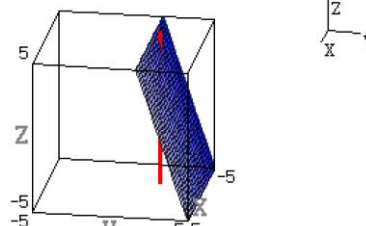
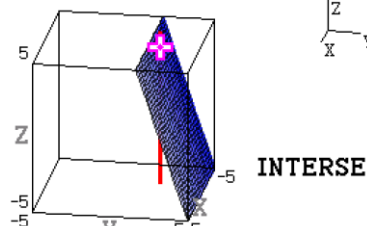
Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Les coordenades del vèrtex V són $V(-2, 2, 4)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel $3y + z - 10 = 0$ i la recta altura. Calculem la intersecció amb la funció *G-Solv*.

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>$aX+bY+cZ+d=0$</p> <p>a b c d</p> <p>[0 3 1 -10]</p> <p style="text-align: right;">-10</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>Punto de paso (X_0, Y_0, Z_0)</p> <p>Vector dirección $[a, b, c]$</p> <p>X₀ Y₀ Z₀</p> <p>[-2 2 0]</p> <p>a b c</p> <p>[0 0 1]</p> <p style="text-align: right;">1</p> <p>EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET</p>
<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> 	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>1: Plano</p> <p>2: Recta</p> <p>X=-2 Y=2 Z=4</p> <p style="text-align: right;">INTERSECC</p> 

c)

El plànel π perpendicular a la diagonal \overline{AC} té vector característic $\overline{AC} = (-2, 2, 0)$

L'equació del plànel és:

$$\pi \equiv -2(x - 1) + 2(y + 2) + 0(z + 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi \equiv -x + y + 3 = 0$$

La recta intersecció dels plànols té equació:

$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ 3y + z = 10 \end{cases}$$

Resolent el sistema determinem la seua equació vectorial.

Obrim el *Menú Ecuación*:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi $a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 20%; text-align: center;">a</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">b</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">c</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">-3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</div> <div style="border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> SOLVE DELETE CLEAR EDIT </div> </div>		a	b	c	d	1	-1	1	0	-3	2	0	3	1	10	3	0	0	0	0	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi $a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n$ $X = \frac{19}{3} - \frac{1}{3}Z$ $Y = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}Z$ $Z = Z$ <div style="border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> REPEAT </div> </div>
	a	b	c	d																	
1	-1	1	0	-3																	
2	0	3	1	10																	
3	0	0	0	0																	

L'equació vectorial de la recta intersecció és:

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{3}, \frac{10}{3}, 0\right) + \mu(-1, -1, 3)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem els dos plànols $3y + z - 10 = 0$, $\pi \equiv -x + y + 3 = 0$

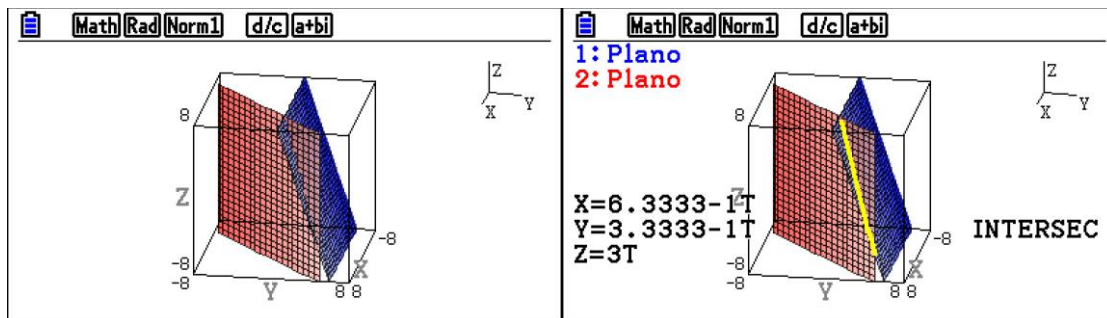
Calculem la intersecció dels dos plànols amb la funció *G-Solv*.

Math Rad Norm1 d/c |a+bi
 $aX + bY + cZ + d = 0$

	a	b	c	d
[-1	1	0	3

3

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



d)

El punt *B* és la intersecció del plànol $BCV \equiv 3y + z - 10 = 0$, el plànol $ABCD \equiv z = 1$ i el plànol perpendicular a la diagonal \overline{AC} que passa pel punt $M(-2, 2, 1)$.

El plànol perpendicular a la diagonal \overline{AC} que passa pel punt *M*, té vector característic $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$

L'equació del plànol és:

$$-2(x + 2) + 2(y - 2) + 0(z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$-x + y - 4 = 0$$

El punt *B* el determinem amb la solució del sistema format pels tres plànols.

$$\begin{cases} 3y + z = 10 \\ z = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

Les coordenades del punt B són $B(-1, 3, 1)$

El vèrtex D és el punt simètric del punt B respecte de M , $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

Siga $D(x, y, z)$

$$(-1, -1, 0) = (x + 2, y - 2, z - 1)$$

Resolent l'equació:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Les coordenades del punt D són $D(-3, 1, 1)$

e)

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AV} = (-1, 1, 3), \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$$

L'àrea de la base $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 4$$

L'àrea del triangle isòsceles ABV és:

$$S_{ABV} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\|$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim els vectors $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AV} = (-1, 1, 3)$. Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}$ i l'àrea:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> A 1 2 3 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> 1 0 2 0 </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">0</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; border-top: 1px solid black;"> ROW COLUMN EDIT </div> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> B 1 2 3 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> 1 -1 1 3 </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">3</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; border-top: 1px solid black;"> ROW COLUMN EDIT </div> </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="font-family: monospace; padding: 5px;"> CrossP(Vct A, Vct B) [6 0 2] 1/2 × Norm(Vct Ans) √10 </div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;"> Vct DotP(CrossP(Angle(UnitV(▶ </div> </div>	

L'àrea és:

$$S_{ABV} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\| = \sqrt{10}$$

L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{ABCDV} = 4 + 4\sqrt{10}$$

f)

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} \| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}] \|$$

Definim la matriu formada els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}$ i calculem el volum

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">A</div> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">-2</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px 5px 10px;">3</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">-1</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">3</td> </tr> </table> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">3</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> ROW-OP ROW COLUMN EDIT </div> </div>	1	0	2	0	2	-2	0	0	3	-1	1	3	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="padding: 5px 10px 5px 10px;"> $\frac{1}{2} \times \text{Norm}(\text{Vct Ans})$ </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;"> $\sqrt{10}$ </div> <div style="padding: 5px 10px 5px 10px;"> $\frac{1}{3} \text{Det Mat A}$ </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">4</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> Mat Mat→Lst Det Trn Augment ▶ </div> </div>
1	0	2	0										
2	-2	0	0										
3	-1	1	3										

El volum és

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} \| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}] \| = 4$$

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \| \overrightarrow{MD} \|$$

Definim el vector $\overrightarrow{MD} = (0, 0, 3)$ i calculem el volum.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">D</div> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px 5px 10px;">3</td> </tr> </table> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">3</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> ROW COLUMN EDIT </div> </div>	1	0	0	3	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid black;"> Math Rad Norm1 d/c a+bi </div> <div style="padding: 5px 10px 5px 10px;"> $\frac{1}{3} \text{Det Mat A}$ </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">4</div> <div style="padding: 5px 10px 5px 10px;"> $\frac{1}{3} \times 4 \times \text{Norm}(\text{Vct D})$ </div> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">4</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> Vct DotP CrossP Angle UnitV ▶ </div> </div>
1	0	0	3		

El volum és:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \| \overrightarrow{MD} \| = 4$$