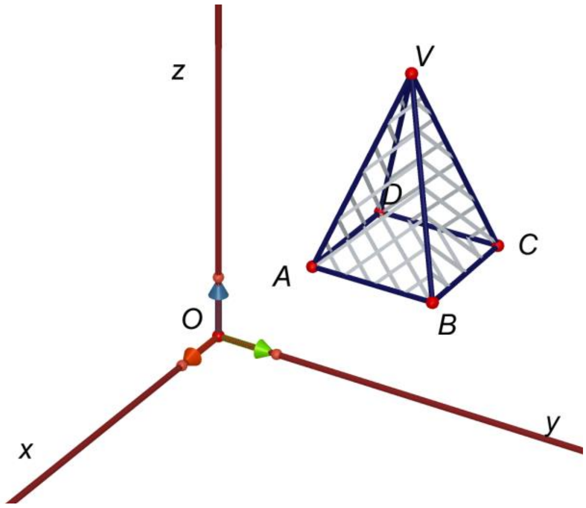
En la figura, està representat en un sistema de referència O_{xyz} una piràmide quadrangular regular $ABCDV$.

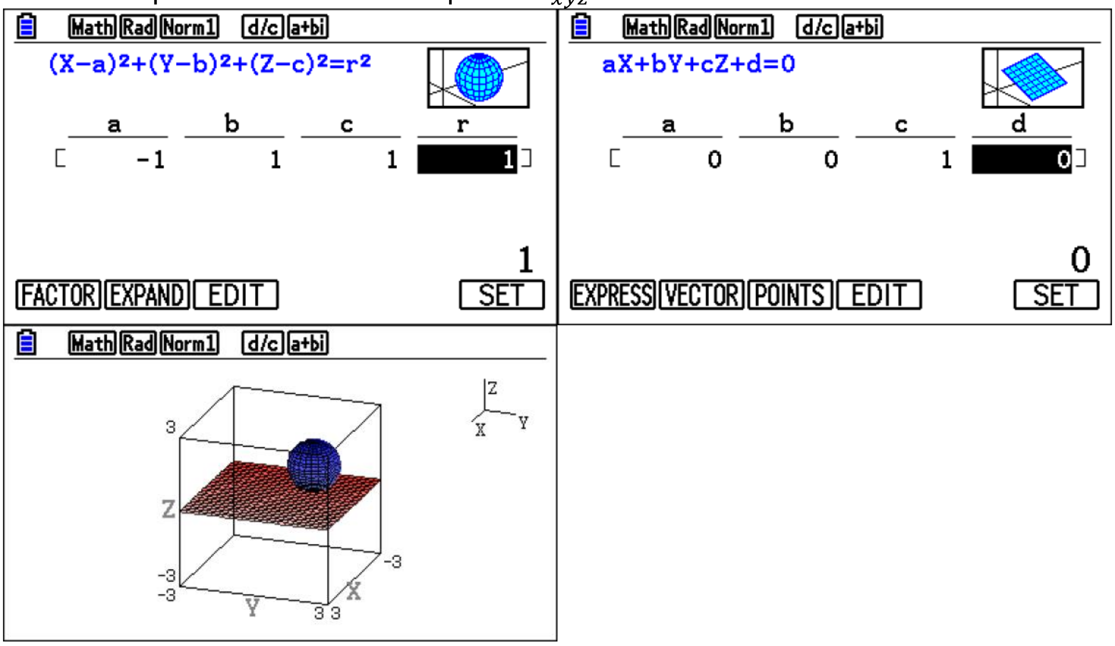


Sabem que:
$ABCD$ és la base paral·lela al plànol xOy
$A(-1,1,1), C(-3,3,1)$
El plànol BCV està definit per l'equació
$3y + z - 10 = 0$

a) Doneu la condició que defineix la superfície esfèrica de centre A i tangent al plànol xOy. Escriu la seua equació.
b) Determineu les coordenades del vèrtex V.
c) Siga el plànol π perpendicular a l'aresta $\overline{AC}$ i que passa pel punt $P(1,-2,1)$. Proveu que els plànols $\pi. BCV$ s'intersecten en una recta. I determineu la seua equació vectorial.
d) Calculeu les coordenades dels vèrtexs B i D.
e) Calculeu l'àrea total de la piràmide.
f) Calculeu el volum de la piràmide.

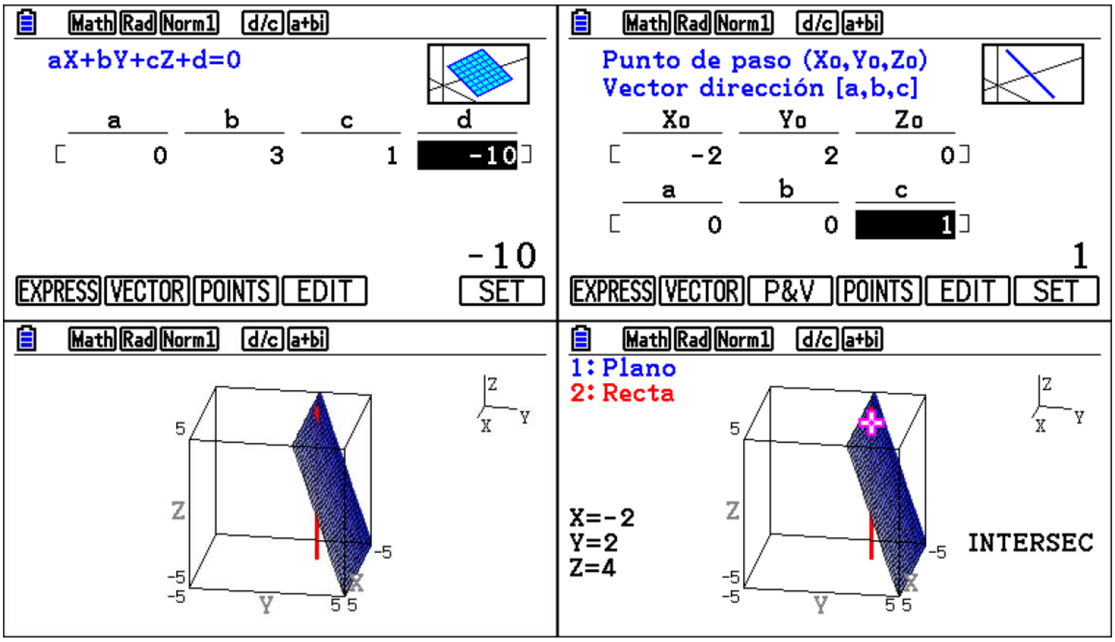
Solució:
a)
L'equació del plànol que conté la base és, paral·lel al plànol $z = 0$ té equació:
$ABCD \equiv z - 1 = 0$

La distància del centre A al plànol $O_{xyz} \equiv z = 0$ és 1.
El radi de l'esfera tangent és $r = 1$.
L'equació de l'esfera és:
$E \equiv (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l'esfera i el plànol O_{xyz}



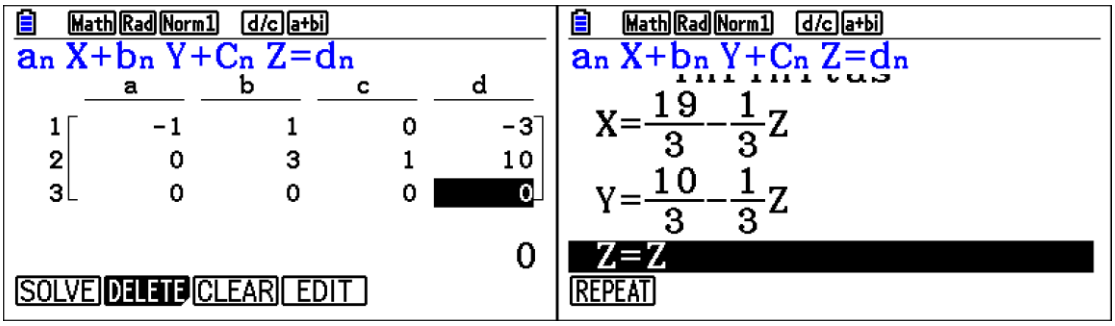
b)
Per ser la piràmide regular quadrangular la projecció de *V* sobre la base, és el centre del quadrat *ABCD*
El centre del quadrat té coordenades:
$M(-2,2,1)$

La recta altura de la piràmide passa pels punts M, V passa per V i té direcció el vector característic de $O_{xyz} \equiv z=0$, $a=(0,0,1)$
la seua equació és:
$$r_{MV} \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$
Per calcular les coordenades del vèrtex V resolem el sistema format pel plànol $BCV \equiv 3y+z-10=0$ i la recta $r_{MV} \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$, $r_{MV} \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases}$
$$\begin{cases} 3y+z=10 \\ x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$$
Les coordenades del vèrtex V són $V(-2,2,4)$
Obrim el *Menú Gràfico 3D.*
Definim i representem el plànol $3y+z-10=0$ i la recta altura. Calculem la intersecció amb la funció *G-Solv.*



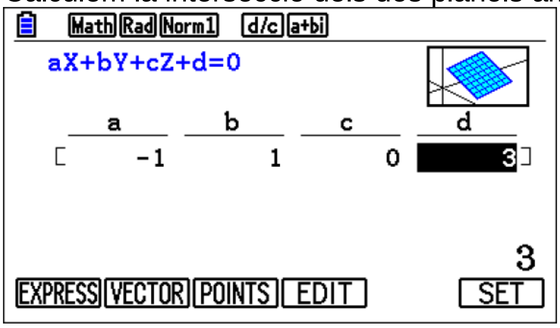
c)
El plànol π perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ té vector característic $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$
L'equació del plànol és:
$\pi \equiv -2(x-1)+2(y+2)+0(z+1)=0$
Simplificant:
$\pi \equiv -x+y+3=0$
La recta intersecció dels plànols té equació:

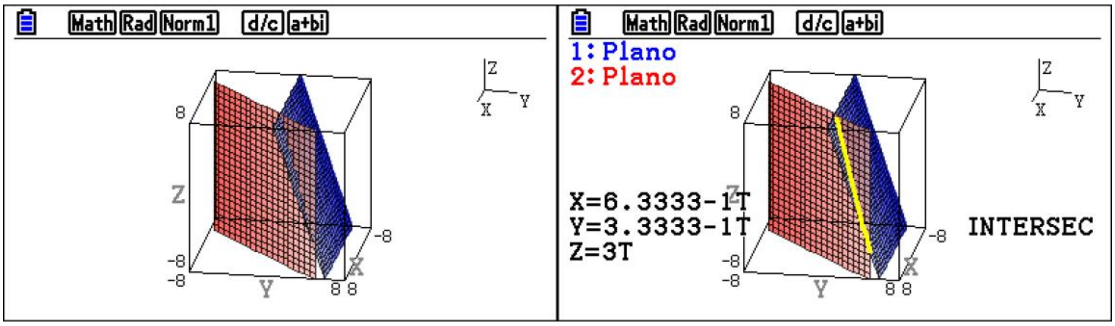
$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ 3y + z = 10 \end{cases}$$
Resolent el sistema determinem la seua equació vectorial.
Obrim el *Menú Ecuación*:



L'equació vectorial de la recta intersecció és:
$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{3}, \frac{10}{3}, 0\right) + \mu(-1, -1, 3)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem els dos plànols $3y + z - 10 = 0$, $\pi \equiv -x + y + 3 = 0$
Calculem la intersecció dels dos plànols amb la funció *G-Solv*.





d)
El punt B és la intersecció del plànol $BCV \equiv 3y + z - 10 = 0$, el plànol $ABCD \equiv z = 1$ i el plànol perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ que passa pel punt M(-2, 2, 1).

El plànol perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ que passa pel punt M, té vector característic $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$
L'equació del plànol és:
$-2(x + 2) + 2(y - 2) + 0(z - 1) = 0$
Simplificant:
$-x + y - 4 = 0$
El punt B el determinem amb la solució del sistema format pels tres plànols.

$$\begin{cases} 3y + z = 10 \\ z = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

Les coordenades del punt B són $B(-1, 3, 1)$

El vèrtex D és el punt simètric del punt B respecte de M, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

Siga $D(x, y, z)$

$(-1, -1, 0) = (x + 2, y - 2, z - 1)$

Resolent l'equació:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Les coordenades del punt D són $D(-3, 1, 1)$

e)

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AV} = (-1, 1, 3), \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0)$

L'àrea de la base $ABCD$ és:

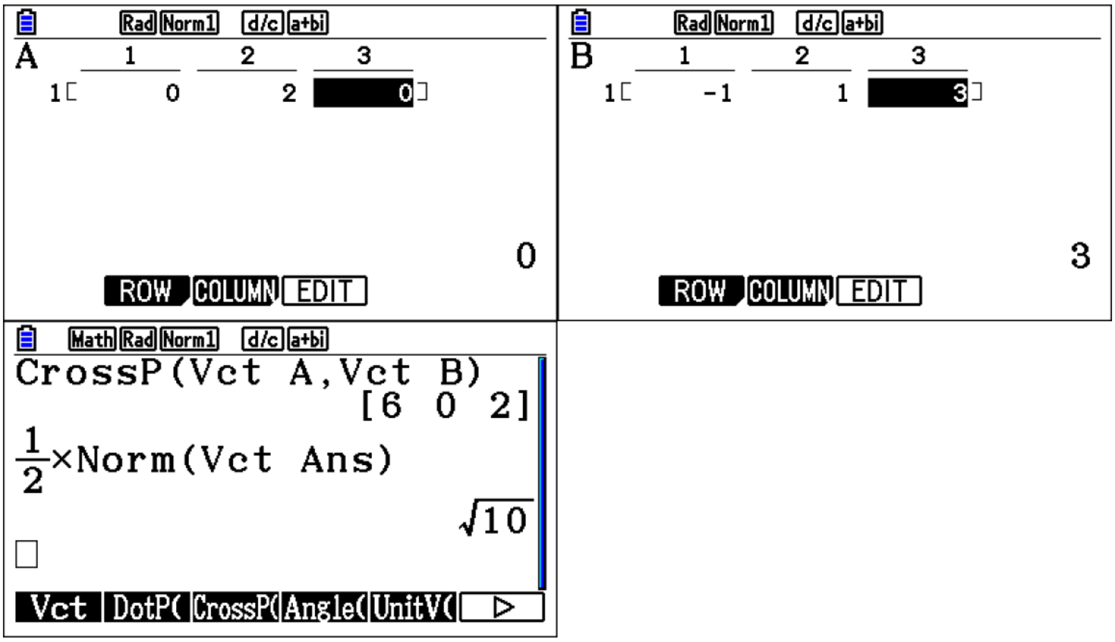
$S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 4$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABV}$ és:

$S_{ABV} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\right\|$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim els vectors $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AV} = (-1, 1, 3)$. Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}$ i l'àrea:



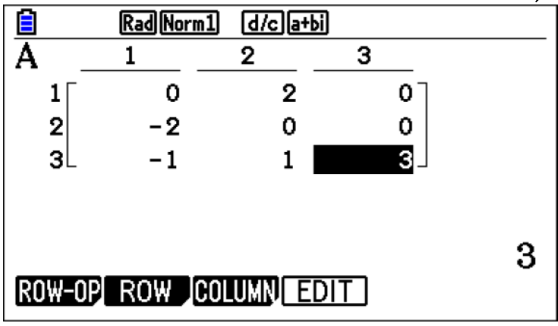
L'àrea és:

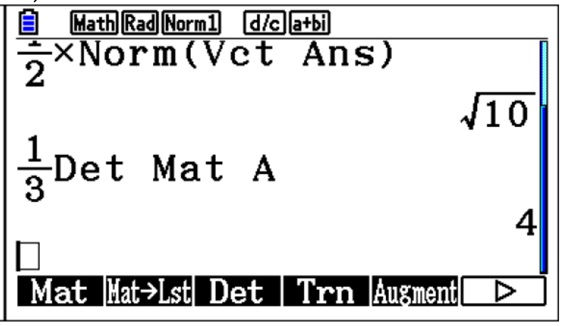
$S_{ABV} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\right\| = \sqrt{10}$

L'àrea total de la piràmide és:

$S_{ABCDV} = 4 + 4\sqrt{10}$

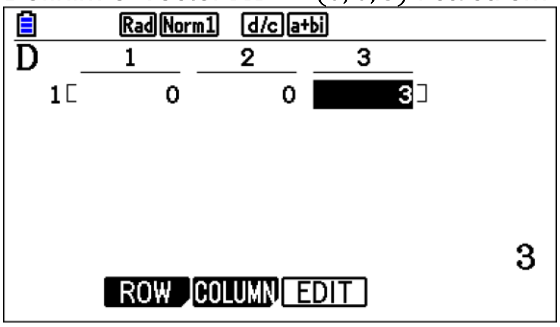
f)
El volum de la piràmide és:
$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}\right]\right|$
Definim la matriu formada els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}$ i calculem el volum

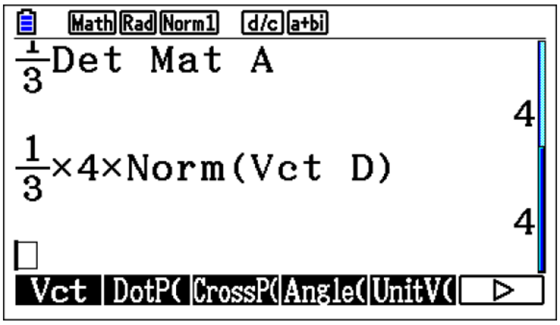




El volum és
$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AV}\right]\right| = 4$

El volum de la piràmide és:
$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \left\|\overrightarrow{MD}\right\|$
Definim el vector $\overrightarrow{MD} = (0, 0, 3)$ i calculem el volum.





El volum és:
$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 4$