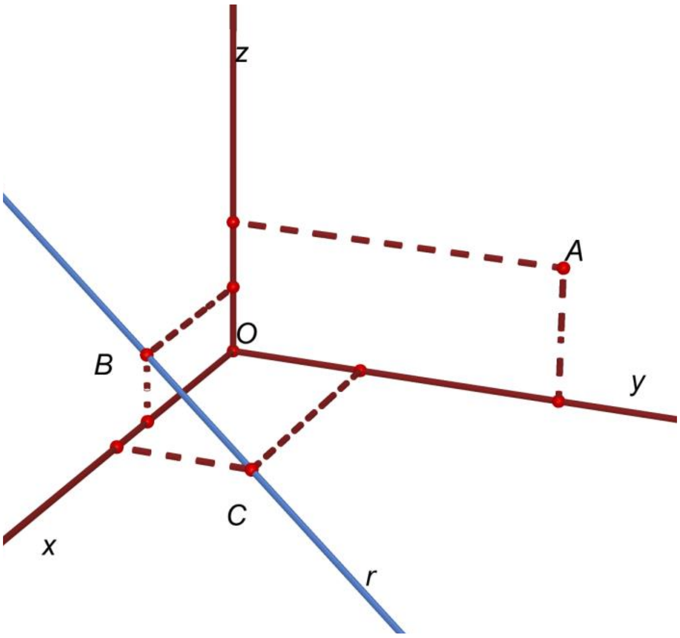
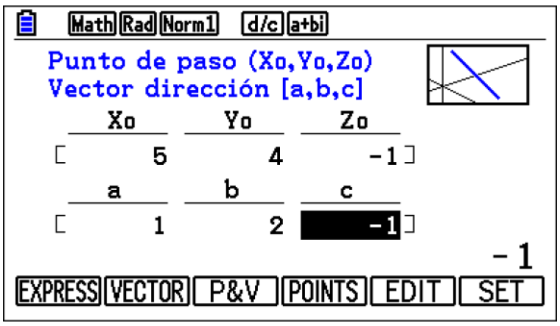
En la figura, estan representats tres punts i una recta en un sistema de referencia ortogonal O_{xyz}

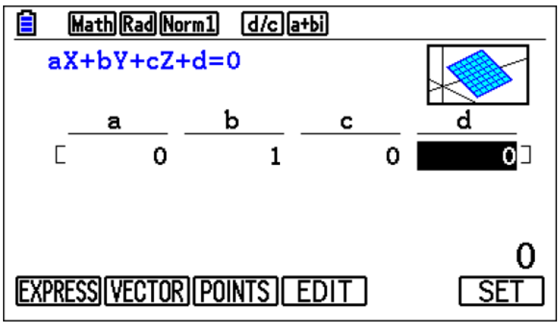


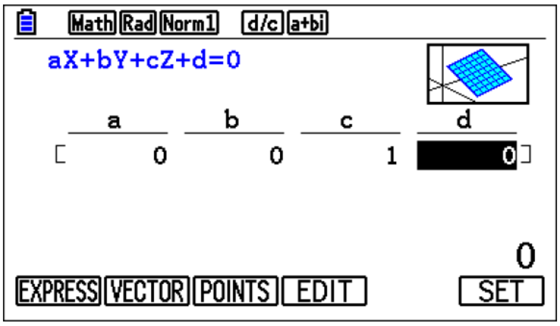
El punt A té coordenades $A(0,5,2)$
El punt B pertany al plànol xOz
El punt C pertany al plànol xOy
La recta BC té equació vectorial $r \equiv (x,y,z) = (5,4,-1) + \alpha(1,2,-1)$

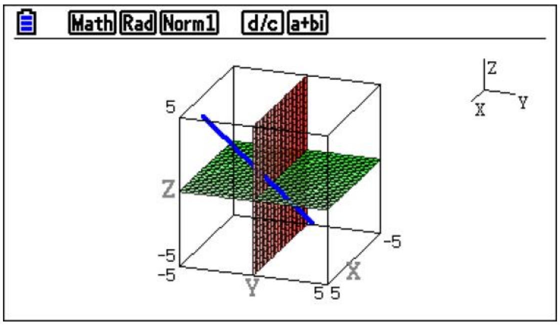
a) Determineu les coordenades dels punts A i C.
b) Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle en $C = 90°$
c) Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
d) Determineu el plànol que passa pels punts A, B, C.
e) Considereu la esfera de centre A tal que la intersecció en el plànol xOy és una circumferència de radi 3. Determineu l'equació de l'esfera.

Solució:
Obrim el *Menú Gráfico 3D.*
Definim i representem la recta $r \equiv (x,y,z) = (5,4,-1) + \alpha(1,2,-1)$ i els plànols $xOz \equiv y = 0, xOy \equiv z = 0$

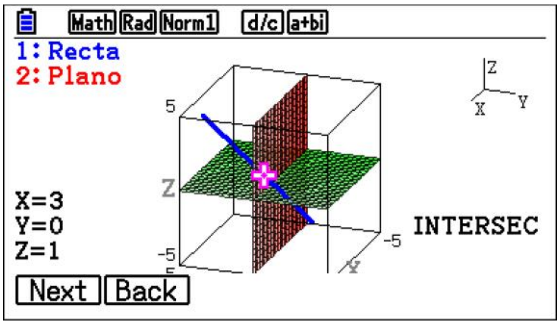


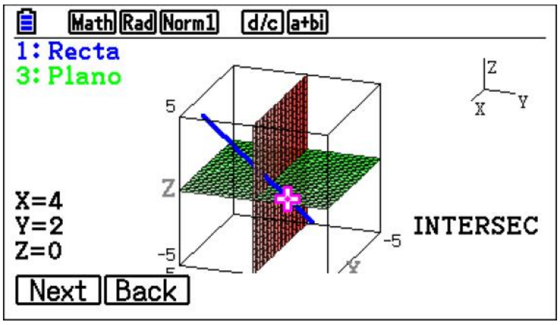






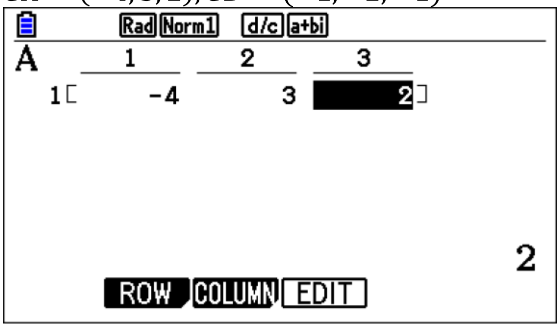
Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció de la recta i cadascun dels dos plànols.

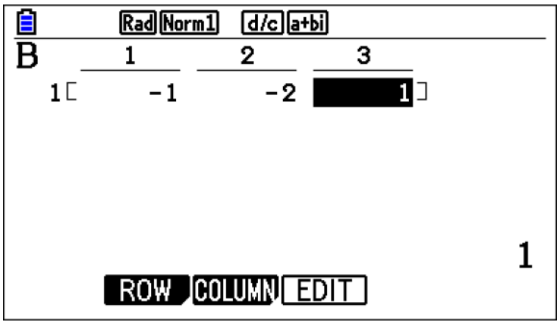




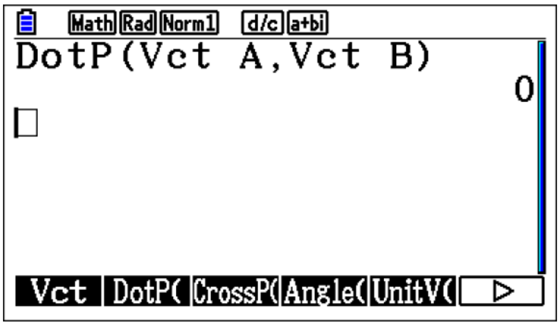
Les coordenades dels punts són:
$B(3, 0, 1), C(4, 2, 0)$

b)
Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Definim els vectors:
$\overrightarrow{CA} = (-4, 3, 2), \overrightarrow{CB} = (-1, -2, -1)$



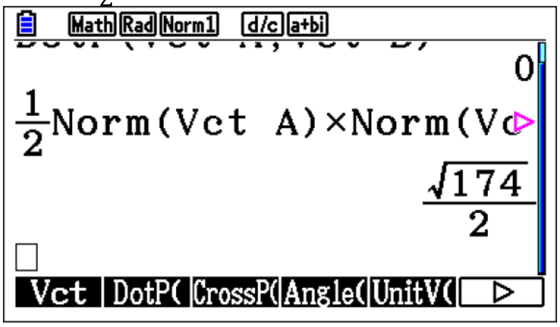


Vegem el producte escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ és zero.



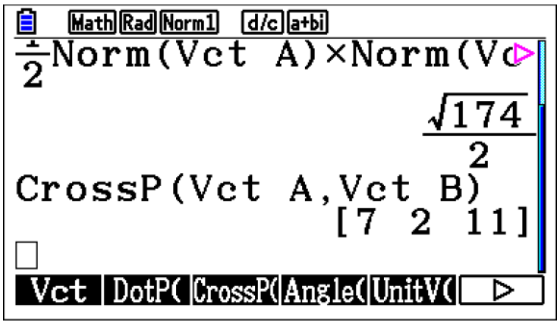
Aleshores, els vectors són ortogonals, $C = 90°$

c)
L’àrea del triangle rectangle és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\|$



L’àrea del triangle és:
$S_{ABC} = \frac{\sqrt{174}}{2}$

d)
L’equació del plànol que passa pels punts A, B, C té equació vectorial.
$\pi \equiv (x, y, z) = (0, 5, 2) + \alpha(-4, 3, 2) + \beta(8 - 1, -2, 1)$
Té vector característic $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$



El vector característic és $a = (7, 2, 11)$
L’equació del plànol és:
$\pi \equiv 7x + 2(y - 5) + 11(z - 2) = 0$
Simplificant:
$\pi \equiv 7x + 2y + 11z - 21 = 0$

e)
La distància del punt A al plànol $z = 0$ és 2.
El radi de la circumferència és 3.
El radi de l’esfera és igual a la hipotenusa del triangle rectangle de catets, 2, 3.
Aplicant el teorema de Pitàgores, el radi R de l’esfera és:
$R = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

L’equació de l’esfera de centre $A(0, 5, 2)$ i radi $R = \sqrt{13}$ és:
$E \equiv x^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 13$

Definim i representem l'esfera.