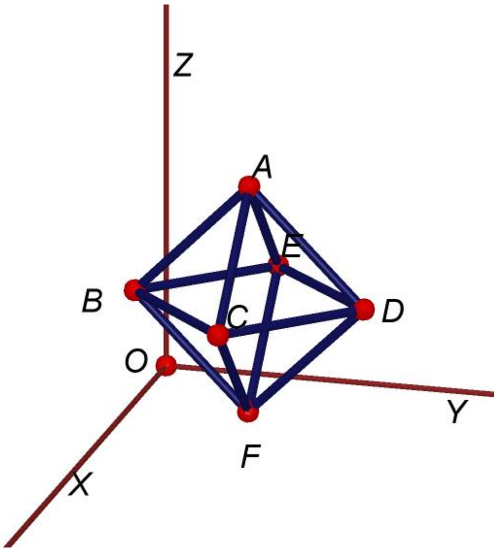
En la figura està representat en un sistema de referencia ortonormal O_{xyz} un octàedre regular $ABCDEF$.



Sabem que:
El vèrtex B té coordenades $B(1, 0, 1)$
El vèrtex E té coordenades $E(0, 1, 1)$
El vèrtex F pertany al plànol xOy
El vèrtex A té coordenades $A(1, 1, 2)$

a) Determineu els vèrtexs de l'octàedre.
b) Determineu el plànol que passa pels punts A, C, D.
c) Proveu que la recta d'equació $x = y = z$ és perpendicular al plànol que passa pels punts A, C, D.
d) Determineu l'equació de l'esfera circumscrita a l'octàedre regular.
e) Siga el plànol π que conté l'eix Oz i passa pel punt A. Classifiqueu el quadrilàter format per la secció d'aquest plànol i l'octàedre. Determineu el perímetre de la secció.

Solució
En l'octògon regular $ABFD$ formen un quadrat.
$\overrightarrow{BA} = (0, 1, 1)$
$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{2}$

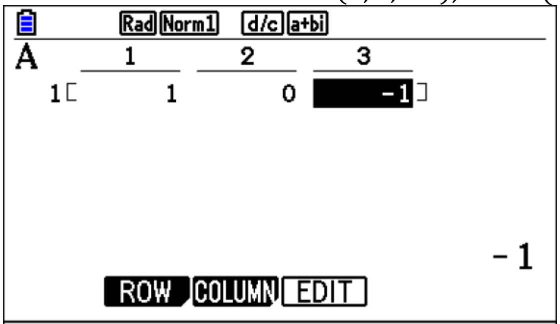
Siguen $F(x, y, 0)$
$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,\ \|\overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{2}$.
$(x - 1, y, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0$
$(x - 1)^2 + y^2 + (-1)^2 = 2$
Resolent el sistema format per dues equacions:
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
Les coordenades de F són $F(1, 1, 0)$
$\overrightarrow{FA} = (0, 0, 2)$
Siga M el centre de l'octàedre. M és el punt mig del segment $\overline{AF}$
Les coordenades de M són $M(1, 1, 1)$
El plànol BCD és paral·lel al plànol $xOy \equiv z = 0$ i passa per M.
La seua equació és $z - 1 = 0$

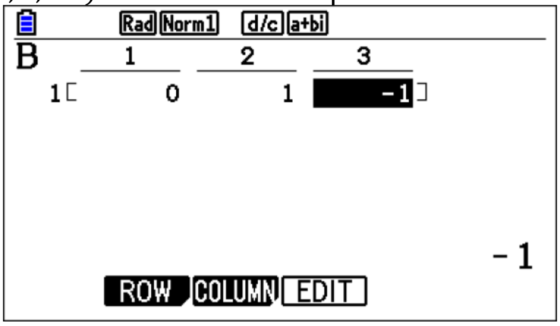
Siga $D(x, y, 1)$
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$
$(0, 1, 0) = (x - 1, y - 1, 0)$
Resolent l'equació:
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
Les coordenades de D són $D(1, 2, 1)$

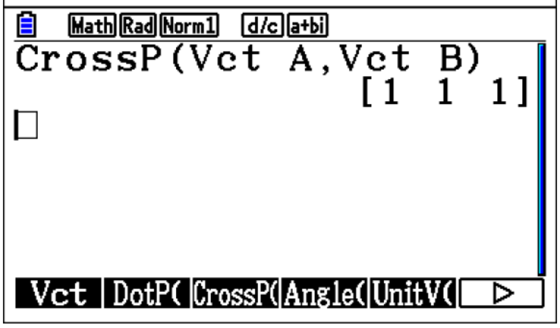
Siga $C(x, y, 1)$
$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{MC}$
$(1, 0, 0) = (x - 1, y - 1, 0)$
Resolent l'equació:
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Les coordenades de C són $C(2,1,1)$

b)
El plànol ACD té direcció $\{\overrightarrow{AC}=(1,0,-1),\overrightarrow{AD}=(0,1,-1)\}$
El vector característic és $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Definim els vectors $\overrightarrow{AC}=(1,0,-1),\overrightarrow{AD}=(0,1,-1)$ i calculem el seu producte vectorial.



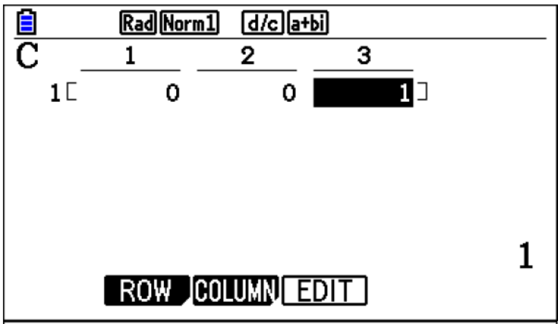


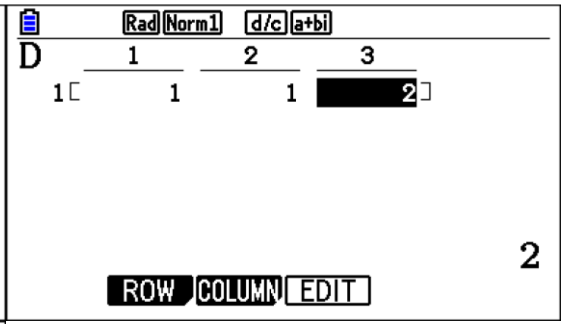


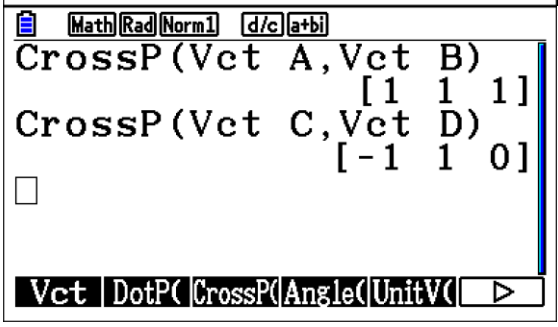
El vector característic és $a=(1,1,1)$
L'equació del plànol és:
$1(x-1)+1(y-1)+1(z-2)=0$
Simplificant:
$x+y+z-4=0$

c)
El vector director de la recta $x=y=z$ és:
$a=(1,1,1)$
Aleshores, la recta és perpendicular al plànol.

d)
L'esfera té centre el punt $M(1,1,1)$ i radi $r=\|\overrightarrow{MA}\|=\|(0,0,1)\|=1$
L'equació l'esfera és:
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1^2$
e)
El plànol que conté l'eix Oz i passa pel punt A.té direcció $\{(0,0,1),\overrightarrow{OA}=(1,1,2)\}$
El seu vector característic és $(0,0,1)\times(1,1,2)$
Definim els vectors $(0,0,1),(1,1,2)$ i calculem el seu producte vectorial.







L’equació del plànol és:

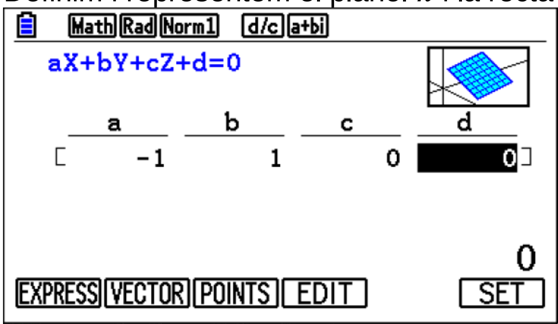
$\pi \equiv -1(x-0)+1(y-0)-0(z-0)=0$

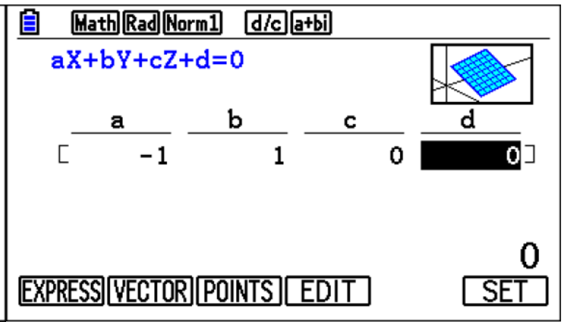
Simplificant:

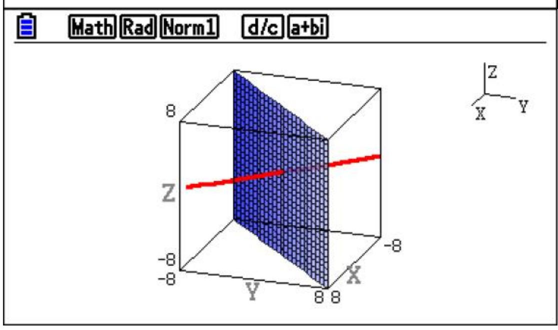
$\pi \equiv -x+y=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

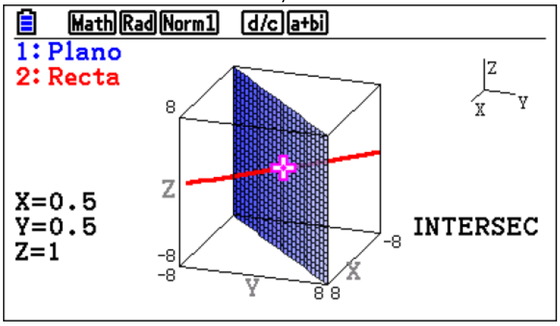
Definim i representem el plànol π i la recta BE



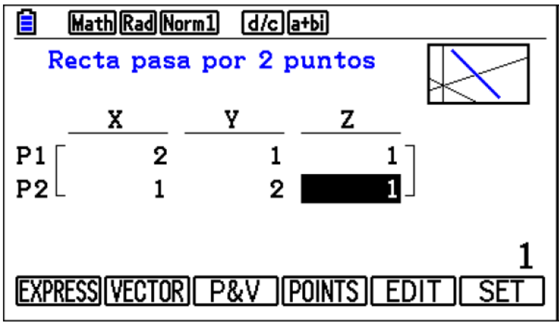


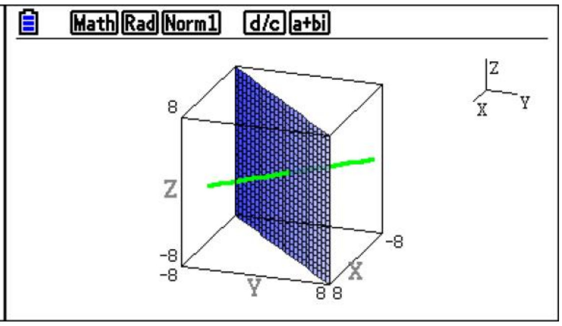


Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció del plànol i la recta:

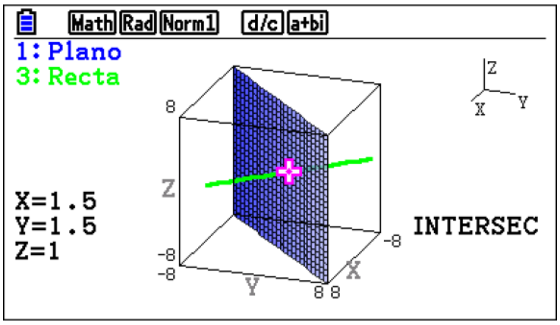


El punt intersecció té coordenades $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ que és el punt mig de l'aresta $\overline{BE}$
Definim la recta CD i representem el plànol π i la recta CD





Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció del plànol i la recta:



El punt intersecció té coordenades $Q\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$ que és el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$

La secció APFQ.
El quadrilàter és un rombe, ja que

$$\overline{AF} = 2, \overline{PQ} = \overline{BC} = \sqrt{2}, \qquad \overline{AP} = \overline{FP} = \overline{FQ} = \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

El perímetre del rombe és:
$P_{APFQ} = 2\sqrt{6}$