

En la figura està representat en un sistema de referència ortonormal O_{xyz} un octàedre regular $ABCDEF$.

Sabem que:

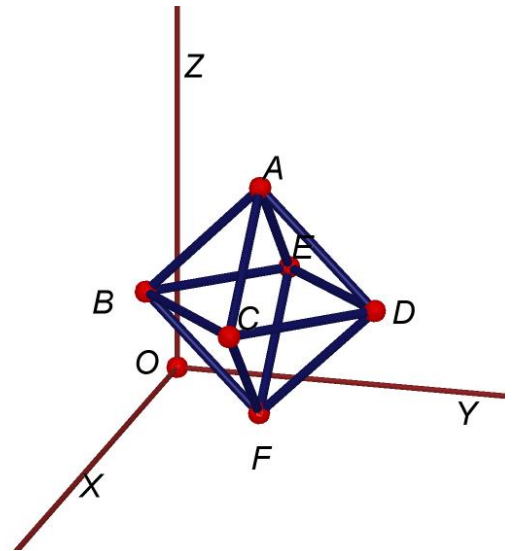
El vèrtex B té coordenades $B(1, 0, 1)$

El vèrtex E té coordenades $E(0, 1, 1)$

El vèrtex F pertany al plànol xOy

El vèrtex A té coordenades $A(1, 1, 2)$

- Determineu els vèrtexs de l'octàedre.
- Determineu el plànol que passa pels punts A, C, D .
- Proveu que la recta d'equació $x = y = z$ és perpendicular al plànol que passa pels punts A, C, D .
- Determineu l'equació de l'esfera circumscrita a l'octàedre regular.
- Siga el plànol π que conté l'eix Oz i passa pel punt A . Classifiqueu el quadrilàter format per la secció d'aquest plànol i l'octàedre. Determineu el perímetre de la secció.



Solució

En l'octògon regular $ABFD$ formen un quadrat.

$$\overrightarrow{BA} = (0, 1, 1)$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{2}$$

Siguen $F(x, y, 0)$

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \quad \|\overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{2}.$$

$$(x - 1, y, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + (-1)^2 = 2$$

Resolent el sistema format per dues equacions:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1$$

Les coordenades de F són $F(1, 1, 0)$

$$\overrightarrow{FA} = (0, 0, 2)$$

Siga M el centre de l'octàedre. M és el punt mig del segment \overline{AF}

Les coordenades de M són $M(1, 1, 1)$

El plànol BCD és paral·lel al plànol $xOy \equiv z = 0$ i passa per M .

La seua equació és $z - 1 = 0$

Siga $D(x, y, 1)$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$$

$$(0, 1, 0) = (x - 1, y - 1, 0)$$

Resolent l'equació:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$y = 2$$

Les coordenades de D són $D(1, 2, 1)$

Siga $C(x, y, 1)$

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{MC}$$

$$(1, 0, 0) = (x - 1, y - 1, 0)$$

Resolent l'equació:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1$$

Les coordenades de C són $C(2, 1, 1)$

b)

El plànol ACD té direcció $\{\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AD} = (0, 1, -1)\}$

El vector característic és $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim els vectors $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AD} = (0, 1, -1)$ i calculem el seu producte vectorial.

The image shows three screenshots of a TI-84 Plus calculator interface. The top-left screenshot shows matrix A with values [1, 0, -1] in row 1 and [1, 1, -1] in row 2. The top-right screenshot shows matrix B with values [1, 0, -1] in row 1 and [0, 1, -1] in row 2. The bottom screenshot shows the CrossP(Vct A, Vct B) function being executed, resulting in the vector [1, 1, 1].

El vector característic és $a = (1, 1, 1)$

L'equació del plànol és:

$$1(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

Simplificant:

$$x + y + z - 4 = 0$$

c)

El vector director de la recta $x = y = z$ és:

$$a = (1, 1, 1)$$

Aleshores, la recta és perpendicular al plànol.

d)

L'esfera té centre el punt $M(1, 1, 1)$ i radi $r = \|\overrightarrow{MA}\| = \|(0, 0, 1)\| = 1$

L'equació l'esfera és:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1^2$$

e)

El plànol que conté l'eix Oz i passa pel punt A té direcció $\{(0, 0, 1), \overrightarrow{OA} = (1, 1, 2)\}$

El seu vector característic és $(0, 0, 1) \times (1, 1, 2)$

Definim els vectors $(0, 0, 1), (1, 1, 2)$ i calculem el seu producte vectorial.

Rad Norm1 d/c a+bi
C 1 2 3
 1 [0 0 1]
 1
ROW COLUMN EDIT

Rad Norm1 d/c a+bi
D 1 2 3
 1 [1 1 2]
 2
ROW COLUMN EDIT

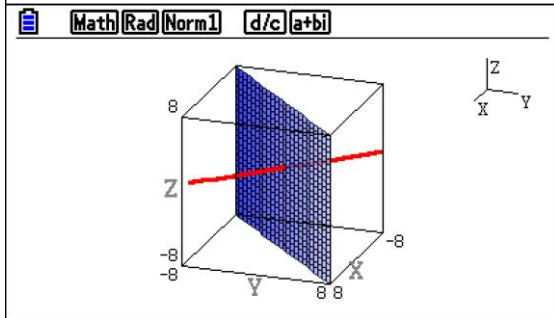
Math Rad Norm1 d/c a+bi
CrossP(Vet A, Vet B)
 [1 1 1]
CrossP(Vet C, Vet D)
 [-1 1 0]
 □
Vct | DotP | CrossP | Angle | UnitV | ▶

L'equació del plànel és:
 $\pi \equiv -1(x - 0) + 1(y - 0) - 0(z - 0) = 0$
 Simplificant:
 $\pi \equiv -x + y = 0$

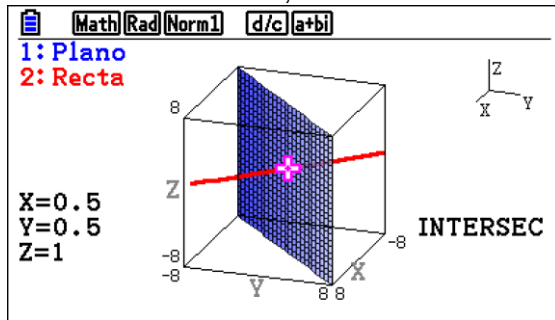
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
 Definim i representem el plànel π i la recta BE

Math Rad Norm1 d/c a+bi
aX+bY+cZ+d=0
 a b c d
 [-1 1 0 0]
 0
EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

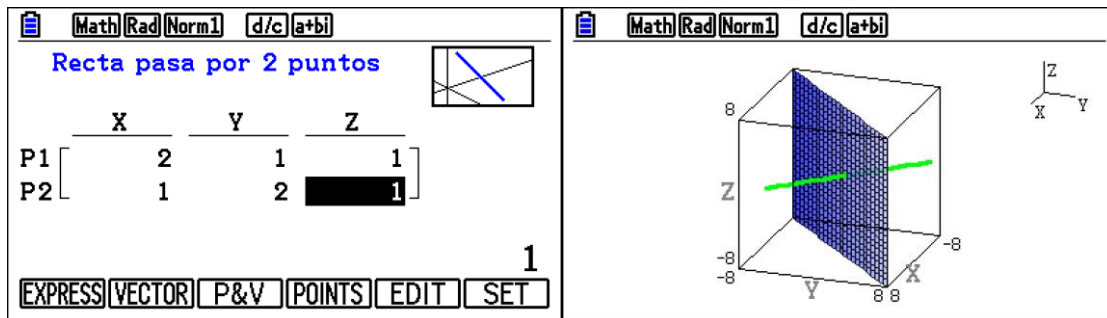
Math Rad Norm1 d/c a+bi
aX+bY+cZ+d=0
 a b c d
 [-1 1 0 0]
 0
EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



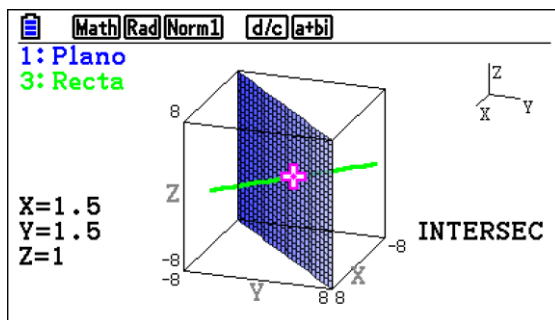
Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció del plànol i la recta:



El punt intersecció té coordenades $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ que és el punt mig de l'aresta \overline{BE}
Definim la recta CD i representem el plànol π i la recta CD



Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció del plànol i la recta:



El punt intersecció té coordenades $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ que és el punt mig de l'aresta \overline{CD}

La secció APFQ.

El quadrilàter és un rombe, ja que

$$\overline{AF} = 2, \overline{PQ} = \overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{AP} = \overline{FP} = \overline{FQ} = \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

El perímetre del rombe és:

$$P_{APFQ} = 2\sqrt{6}$$