Donades les esferes d'equacions:

$E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$, $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4$.

a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Solució:

a)

L'esfera $E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ té centre $O_1(1,2,1)$ i radi $R_1 = 2$.

L'esfera $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4$ té centre $O_2(2,4,3)$ i radi $R_2 = 2$.

$\overline{O_1O_2} = \left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\| = \|(1,2,2)\| = 3.$

$|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$

$0 < 3 < 4$

Les esferes són secants.

b)

$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 4 - 1 - 4 - 1 = -2$

$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z = 4 - 4 - 16 - 9 = -25$

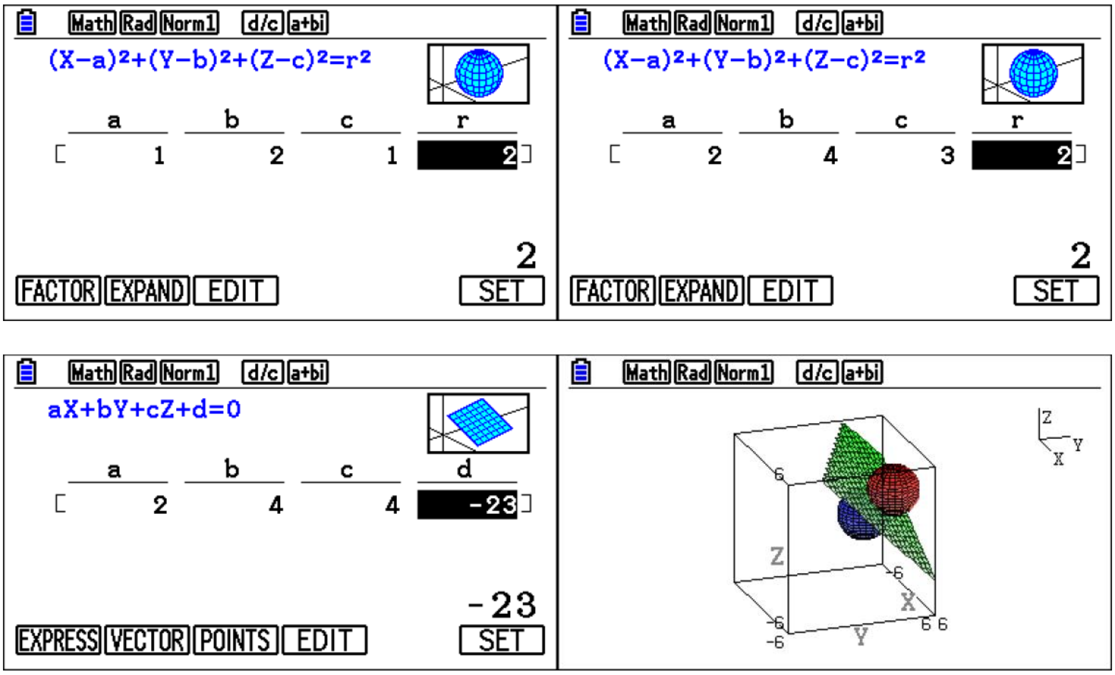
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:

L'equació del plànol intersecció és:

$\pi \equiv 2x + 4y + 4z - 23 = 0$

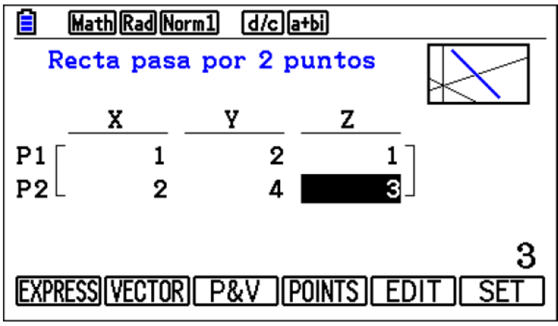
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

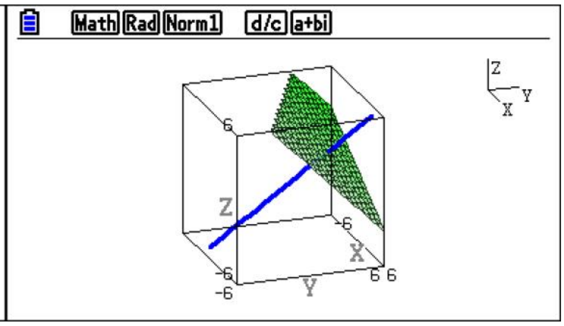
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:



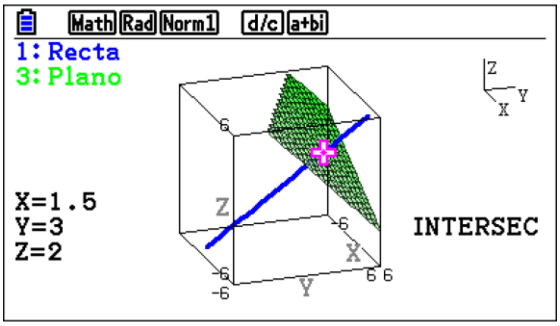
Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.

Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes





Amb la funció *G-Solv,* determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:
$O\left(\frac{3}{2},3,2\right)$. Notem que és el punt mig dels dos centres ja que les dues circumferències tenen el mateix radi.
Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d'hipotenusa $R_1 = 2$ i catet $a = d(O_1,\pi) = \left|\frac{2\cdot1+4\cdot2+4\cdot1-23}{\sqrt{4+14+16}}\right| = \frac{3}{2}$, la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.
El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

d)
La intersecció de les dues esferes està format per dos casquets iguals de radi $R_1 = 2$ i altura, $h = R_1 - a = \frac{1}{2}$

El volum d'un casquet esfèric és $V_{casquet} = \pi \cdot h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és:

$$V = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(2 - \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12}\pi$$