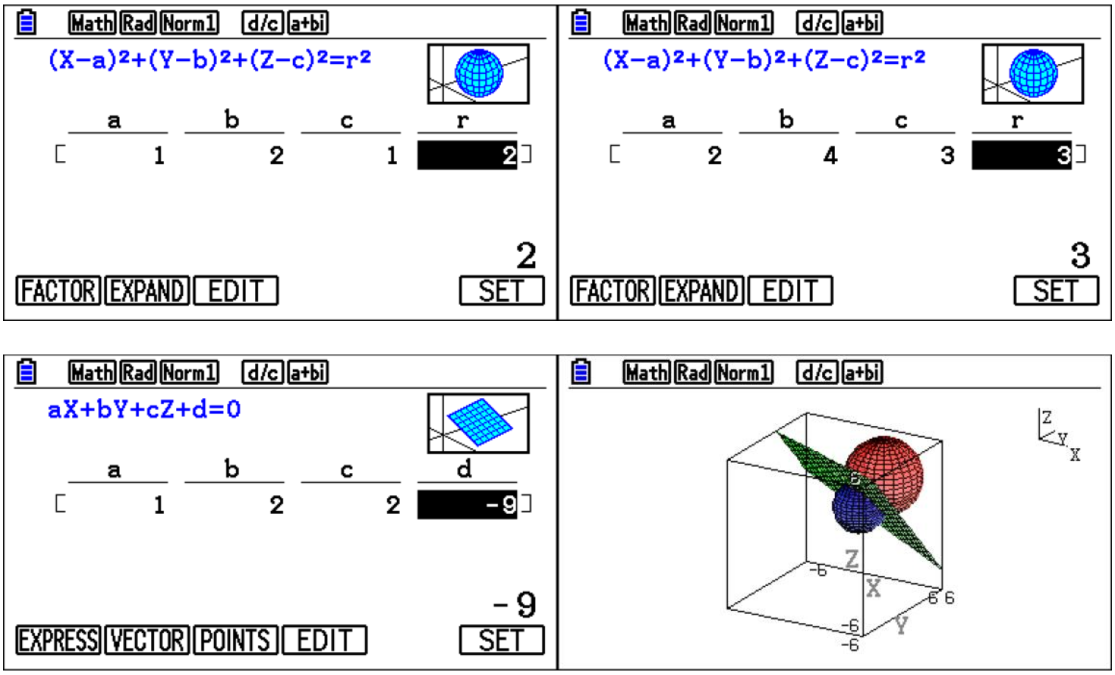
Donades les esferes d'equacions:
$E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$, $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$.

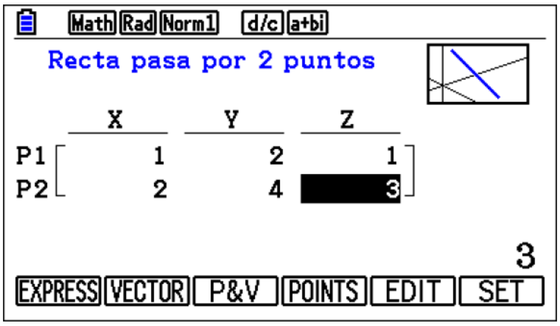
a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

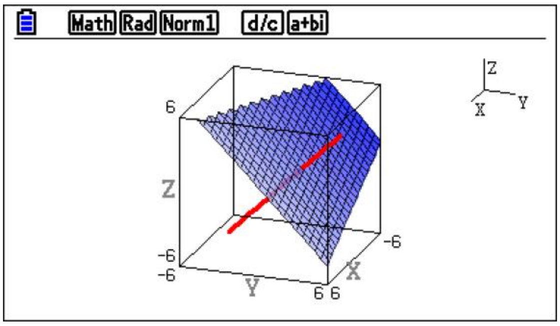
Solució:
a)
L'esfera $E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ té centre $O_1(1,2,1)$ i radi $R_1 = 2$.
L'esfera $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4$ té centre $O_2(2,4,3)$ i radi $R_2 = 3$.
$\overline{O_1O_2} = \left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\| = \|(1,2,2)\| = 3.$
$|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$
$1 < 3 < 5$
Les esferes són secants.
b)
$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 4 - 1 - 4 - 1 = -2$
$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z = 9 - 4 - 16 - 9 = -20$
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:
L'equació del plànol intersecció és:
$\pi \equiv x + 2y + 2z - 9 = 0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:

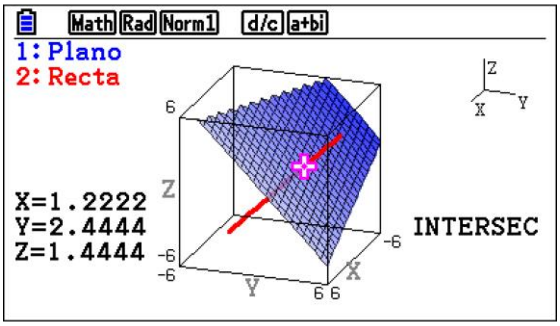


c)
Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.
Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes





Amb la funció *G-Solv,* determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:
$O\left(\frac{11}{9},\frac{22}{9},\frac{13}{9}\right)$

Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d'hipotenusa $R_1 = 2$ i catet $a = d(O_1,\pi) = \left|\frac{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1-9}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \frac{2}{3}$, la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.
El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

d)
La intersecció de les dues esferes està format per dos casquets:
1.- Un casquet de radi $R_1 = 2$ i altura, $h_1 = R_1 - a = \frac{4}{3}$
2.- Un casquet de radi $R_2 = 3$ i altura, $h_2 = R_2 - (\overline{O_1O_2} - a) = \frac{2}{3}$

El volum d'un casquet esfèric és $V_{casquet} = \pi \cdot h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és la suma dels volums dels dos casquets:

$$V = \pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(2-\frac{4}{9}\right) + \pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(3-\frac{2}{9}\right) = 36\pi$$