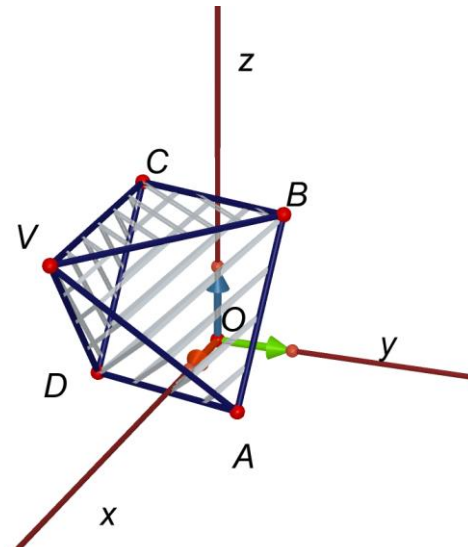


En la figura està representada en un sistema de referència ortonormal O_{xyz} una piràmide quadrangular regular $ABCDV$
 $A(2, 1, 0), C(0, -1, 2), V(3, -1, 2)$



- Calculeu la mesura de l'angle $\angle VAC$
- Calculeu l'equació del plànol de la base $ABCD$
- Calculeu el volum de la piràmide.
- Determineu les coordenades dels vèrtexs.
- Calculeu l'àrea total de la piràmide.

Solució:

El centre M de la base és el punt mig de la diagonal \overline{AC}

Les seues coordenades són $M(1, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AV} = (1, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{MV} = (2, -1, 1)$$

Obrim el Menú Ejec-Mat.

Definim els tres vectors.

<p>A</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>2</td> </tr> </table> <p>2</p> <p>ROW COLUMN EDIT</p>	1	2	3	1	1	-2			2	<p>B</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-2</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>2</td> </tr> </table> <p>2</p> <p>ROW COLUMN EDIT</p>	1	2	3	1	-2	-2			2
1	2	3																	
1	1	-2																	
		2																	
1	2	3																	
1	-2	-2																	
		2																	
<p>C</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>-1</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> </table> <p>1</p> <p>ROW COLUMN EDIT</p>	1	2	3	1	2	-1			1										
1	2	3																	
1	2	-1																	
		1																	

a)

Calculem l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}$

<p>Math Deg Norm1 d/c a+bi</p> <p>Angle(Vct A, Vct B)</p> <p>54.73561032</p> <p>□</p> <p>o r g ° ' " ← →</p>	<p>Math Deg Norm1 d/c a+bi</p> <p>Angle(Vct A, Vct B)</p> <p>54° 44' 08.2"</p> <p>□</p> <p>o r g ° ' " ← →</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

L'angle que formen és $\angle VAC = 54^{\circ}44'8''$

b)

El vector característic de la base $ABCD$ és $\overrightarrow{MV} = (2, -1, 1)$

L'equació del plànel és:

$$2(x - 2) - 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0$$

Simplificant:

$$2x - y + z - 3 = 0$$

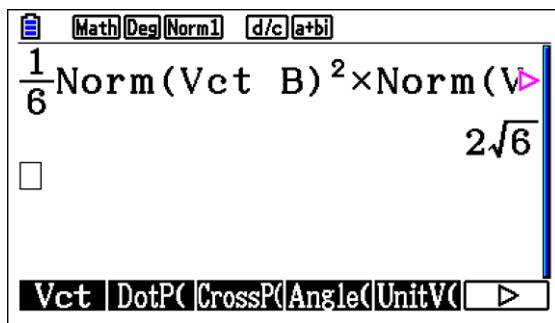
L'altura de la piràmide sobre la base $ABCD$ és: $\|\overrightarrow{MV}\|$

L'àrea de la base $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \|\overrightarrow{MV}\|$$



El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDV} = 2\sqrt{6}$$

d)

B pertany al plànel $2x - y + z - 3 = 0$, aleshores, satisfà la seua equació.

Siga $B(x, y, z)$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{MC} = (2, -1, 1), \overrightarrow{MB} = (x - 1, y, z - 1)$$

$$(2, -1, 1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$-x - y + z = 0$$

Restant les dues equacions:

$$x = 1, z = 1 - y$$

Les coordenades de B són:

$$B(1, y, 1 + y)$$

$$\|\overrightarrow{MB}\| = \sqrt{3}$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Substituint les coordenades de B en l'equació:

$$2y^2 = 3$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

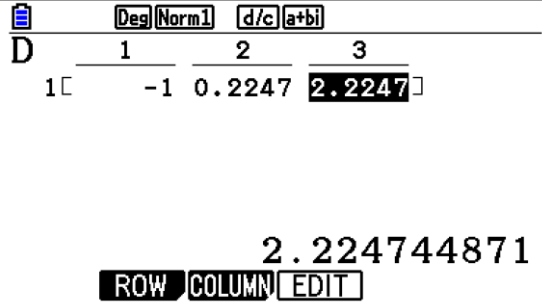
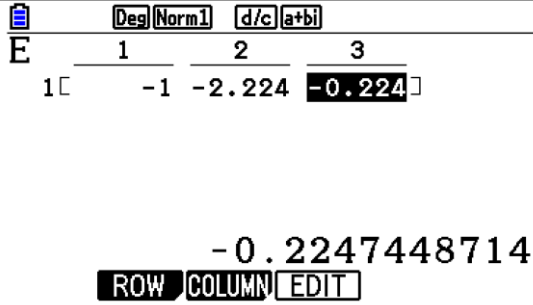
Suposem que $y = +\frac{\sqrt{6}}{2}$

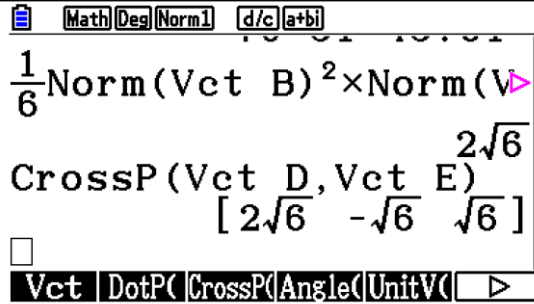
$$B\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right) \text{ i } D\left(1, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$$

Els vectors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MV}$ tenen la mateixa direcció i sentit.

$$\overrightarrow{AB} = \left(-1, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right), \overrightarrow{AD} = \left(-1, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$$

Definim els dos vectors i efectuem el producte vectorial d'ambdós.

 <p>D</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;">1</td> <td style="width: 10%;">2</td> <td style="width: 10%;">3</td> </tr> <tr> <td>1[</td> <td>-1</td> <td>0.2247</td> <td>2.2247]</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">2.224744871</p> <p style="text-align: center;">ROW COLUMN EDIT</p>		1	2	3	1[-1	0.2247	2.2247]	 <p>E</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;">1</td> <td style="width: 10%;">2</td> <td style="width: 10%;">3</td> </tr> <tr> <td>1[</td> <td>-1</td> <td>-2.224</td> <td>-0.224]</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">-0.2247448714</p> <p style="text-align: center;">ROW COLUMN EDIT</p>		1	2	3	1[-1	-2.224	-0.224]
	1	2	3														
1[-1	0.2247	2.2247]														
	1	2	3														
1[-1	-2.224	-0.224]														



Math Deg Norm1 d/c |a+bi

$\frac{1}{6} \text{Norm}(\text{Vct B})^2 \times \text{Norm}(\text{Vct E})$

CrossP(Vct D, Vct E)

$[2\sqrt{6} \quad -\sqrt{6} \quad \sqrt{6}]$

Vct | DotP(| CrossP(| Angle(| UnitV(| >

Aleshores els vectors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}), \overrightarrow{MV} = (2, -1, 1)$ tenen la mateixa direcció i sentit.

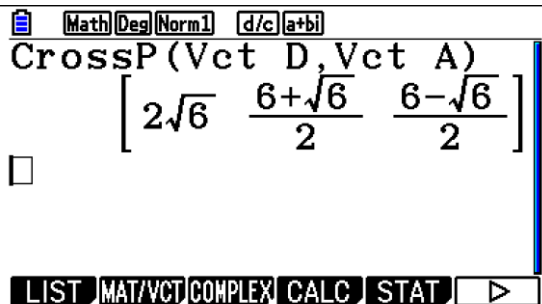
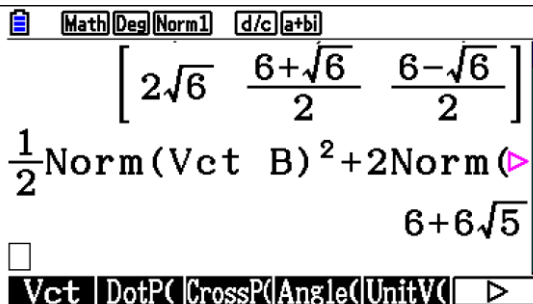
L'altra solució no és vàlida.

e)

L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{total} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABV} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\|$$

Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}$ i l'àrea total.

 <p>Math Deg Norm1 d/c a+bi</p> <p>CrossP(Vct D, Vct A)</p> <p style="margin-left: 40px;">$[2\sqrt{6} \quad \frac{6+\sqrt{6}}{2} \quad \frac{6-\sqrt{6}}{2}]$</p> <p>LIST MAT/VCT COMPLEX CALC STAT ></p>	 <p>Math Deg Norm1 d/c a+bi</p> <p style="margin-left: 40px;">$[2\sqrt{6} \quad \frac{6+\sqrt{6}}{2} \quad \frac{6-\sqrt{6}}{2}]$</p> <p>$\frac{1}{2} \text{Norm}(\text{Vct B})^2 + 2 \text{Norm}(\text{Vct E})$</p> <p style="text-align: center;">6+6√5</p> <p>Vct DotP(CrossP(Angle(UnitV(></p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

L'àrea total és:

$$S_{total} = 6 + 6\sqrt{5}$$