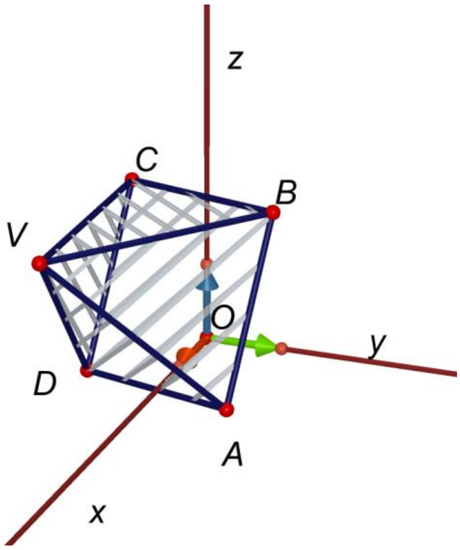
En la figura està representada en un sistema de referència ortonormal O_{xyz} una piràmide quadrangular regular $ABCDV$
$A(2,1,0), C(0,-1,2), V(3,-1,2)$

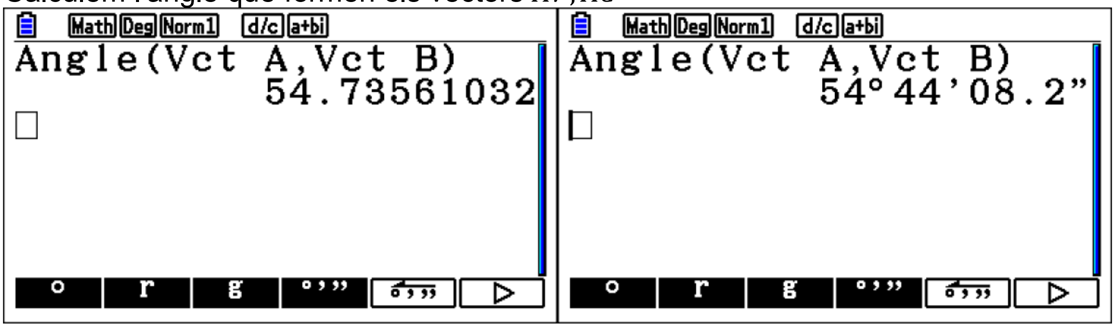


a) Calculeu la mesura de l'angle $\angle VAC$
b) Calculeu l'equació del plànol de la base $ABCD$
c) Calculeu el volum de la piràmide.
d) Determineu les coordenades dels vèrtexs.
e) Calculeu l'àrea total de la piràmide.

Solució:
El centre M de la base és el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$
Les seues coordenades són $M(1,0,1)$

$\overrightarrow{AV} = (1,-2,2), \overrightarrow{AC} = (-2,-2,2), \overrightarrow{MV} = (2,-1,1)$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Definim els tres vectors.

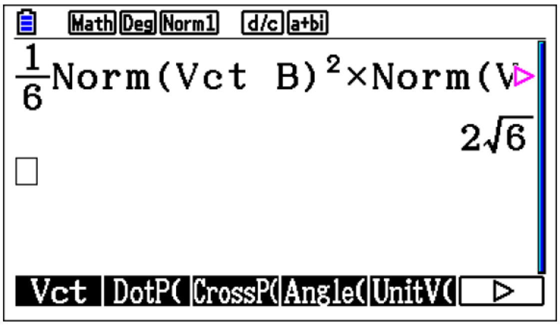
a)
Calculem l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}$



L'angle que formen és $\angle VAC = 54°44'8''$

b)
El vector característic de la base $ABCD$ és $\overrightarrow{MV} = (2, -1, 1)$
L'equació del plànol és:
$2(x-2) - 1(y-1) + 1(z-0) = 0$
Simplificant:
$2x - y + z - 3 = 0$

L'altura de la piràmide sobre la base $ABCD$ és: $\left\|\overrightarrow{MV}\right\|$
L'àrea de la base $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$
El volum de la piràmide és:
$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \left\|\overrightarrow{MV}\right\|$



El volum de la piràmide és:
$V_{ABCDV} = 2\sqrt{6}$

d)
B pertany al plànol $2x - y + z - 3 = 0$, aleshores, satisfà la seua equació.
Siga $B(x, y, z)$

$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \left\|\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{3}$
$\overrightarrow{MC} = (2, -1, 1), \overrightarrow{MB} = (x - 1, y, z - 1)$
$(2, -1, 1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$
Simplificant:
$-x - y + z = 0$
Restant les dues equacions:
$x = 1, z = 1 - y$
Les coordenades de B són:
$B(1, y, 1 + y)$

$\left\|\overrightarrow{MB}\right\| = \sqrt{3}$
$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{3}^2$
Substituint les coordenades de B en l'equació:
$2y^2 = 3$
$y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

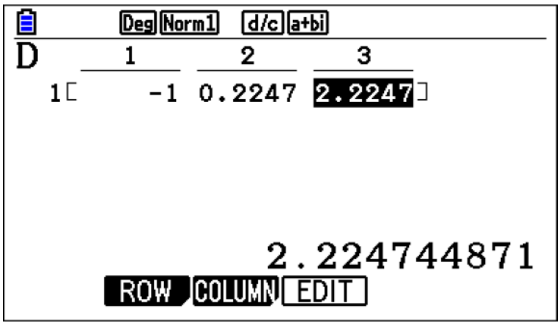
Suposem que $y = +\frac{\sqrt{6}}{2}$

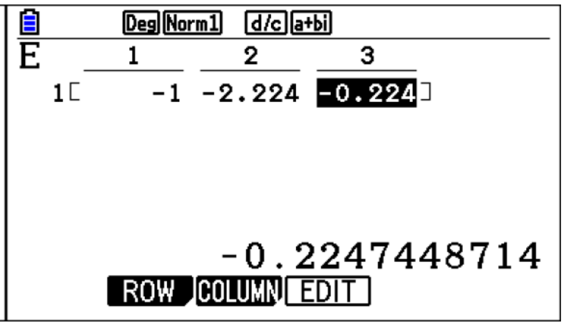
$B\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$ i $D\left(1, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$

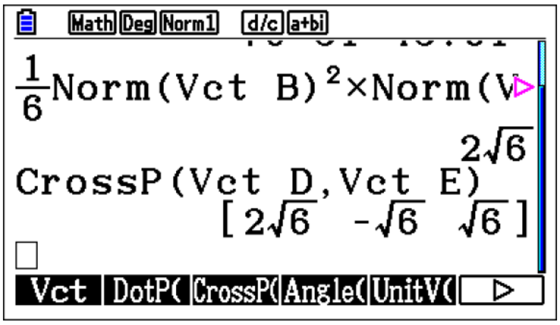
Els vectors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MV}$ tenen la mateixa direcció i sentit.

$\overrightarrow{AB} = \left(-1, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right), \overrightarrow{AD} = \left(-1, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$

Definim els dos vectors i efectuem el producte vectorial d'ambdós.







Aleshores els vectors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \left(2\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}\right), \overrightarrow{MV} = (2, -1, 1)$ tenen la mateixa direcció i sentit.

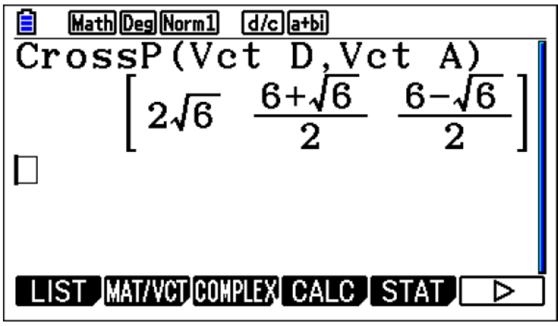
L'altra solució no és vàlida.

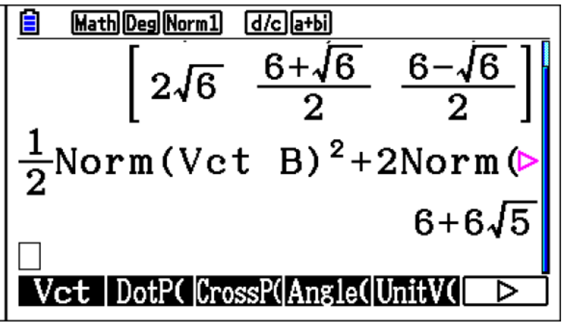
e)

L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{total} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABV} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}\right\|$$

Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AV}$ i l'àrea total.





L'àrea total és:

$S_{total} = 6 + 6\sqrt{5}$