Siga la funció f definida per a tots els nombres x reals,

$f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$

a) Dibuixeu la funció.

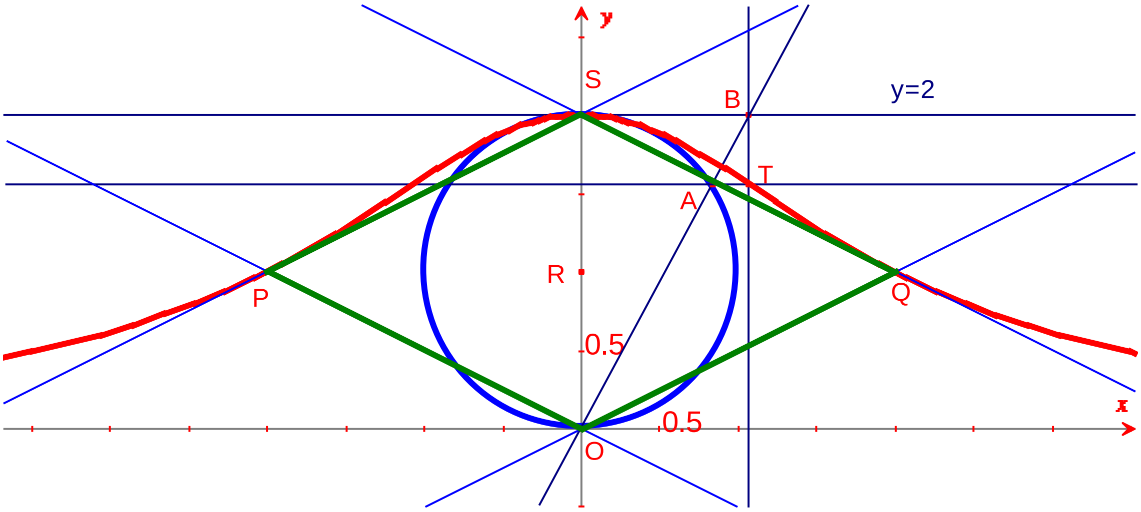
b) Determineu les rectes tangents a la funció en els punts $P(-2,1), Q(2,1)$. Considerem el quadrilàter format per les dues rectes tangents i les rectes OP, OQ. Demostreu que és un rombe. Calculeu els seus angles.

c) Considerem la circumferència de radi 1 i centre $(0,1)$
Una recta r que passa per l'origen O talla la circumferència en el punt A i a la recta $y = 2$ en el punt B. Proveu que per a qualsevol recta r, l'abscissa del punt B i l'ordenada del punt A formen un punt que pertany a la funció $f(x)$.

d) Considerem la regió R afitada per la funció $f(x)$ l'eix d'abscisses en l'interval $[0,2]$. Proveu que aquesta l'àrea de la regió R és igual a l'àrea del cercle.
Proveu que l'àrea de la funció en tot l'eix d'abscisses és igual a quatre vegades l'àrea del cercle.

e) La regió R, si la girem sobre l'eix d'ordenades, genera un sòlid W. Sense calcular la integral quin és el volum del sòlid. Comproveu el resultat amb la integral.

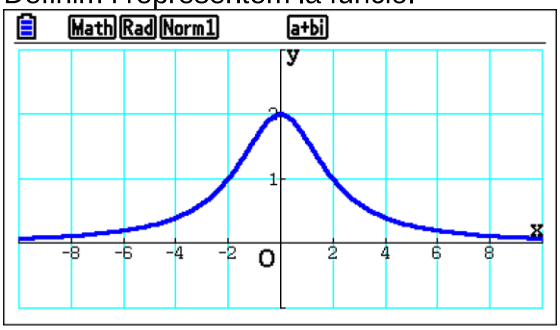
Solució:



a)b)

Obrim el *Menú Gráfico*.

Definim i representem la funció.



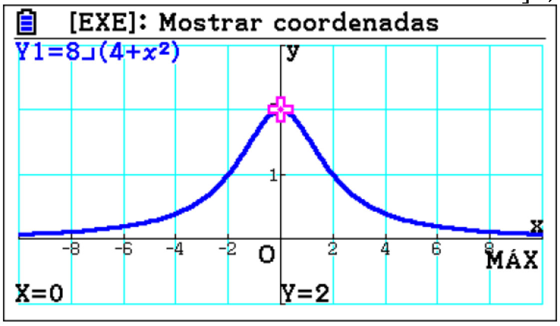
Notem que els punts $P(-2,1), Q(2,1)$ pertanyen a la funció $f(x)$

Calculem la derivada de la funció.

$f'(x) = \dfrac{-16x}{(4+x^2)^2}$

Estudiant el signe de la primera derivada:

La funció és estrictament creixent en $]-\infty, 0[$
La funció és estrictament decreixent en $]0, +\infty[$

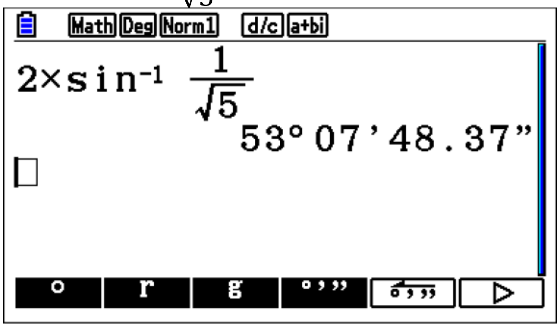


El màxim de la funció és el punt $S(0,2)$
La recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

$f'(-2) = \frac{1}{2}, f'(2) = -\frac{1}{2}$
L'equació de les recta tangents en els punts $P(-2,1), Q(2,1)$ són respectivament::
$t_P \equiv y = \frac{1}{2}x + 2, t_Q \equiv y = -\frac{1}{2}x + 2$
Les dues rectes tangents s'intersecten en el punt $S(0,2)$

El quadrilàter $OPSQ$ és un rombe ja que el seus costats són iguals:
$\overline{OP} = \overline{PS} = \overline{SQ} = \overline{OQ} = \sqrt{5}$

Siga $R(0,1)$ el centre del rombe $OPSQ$.
$\alpha = \angle SPO$
$\alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$



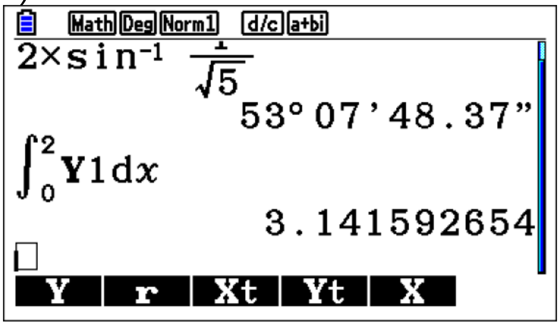
$\alpha = \angle SPO = 53°7'48"$
$\angle POQ = 180° - \alpha = 126°52'12"$
c)
Siga $r \equiv y = mx$ una recta qualsevol que passa per l'origen (llevat de la recta $x = 0$).
Les coordenades del punt B són
$B\left(\frac{2}{m}, 2\right)$
Per calcular les coordenades del punt A resolem el sistema format per la recta i la circumferència $\begin{cases} y = mx \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$
Les coordenades són:
$A\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{2m^2}{1+m^2}\right)$
L'abscissa del punt B i l'ordenada del punt A formen el punt T de coordenades:
$T\left(\frac{2}{m}, \frac{2m^2}{1+m^2}\right)$

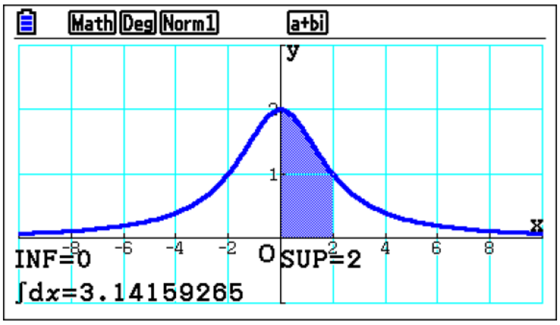
Vegem que el punt S pertany a la funció:

$$f\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{8}{4+\left(\frac{2}{m}\right)^2} = \frac{2m^2}{1+m^2}$$

Aquest, provés ens dóna la construcció geomètrica de la corba.

d)



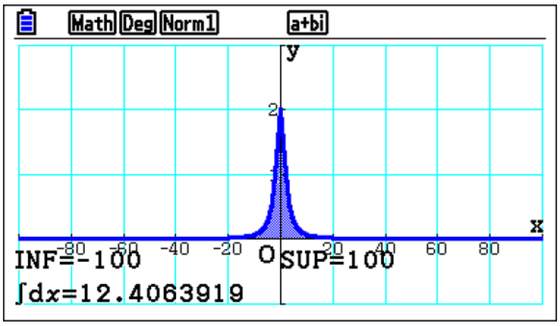


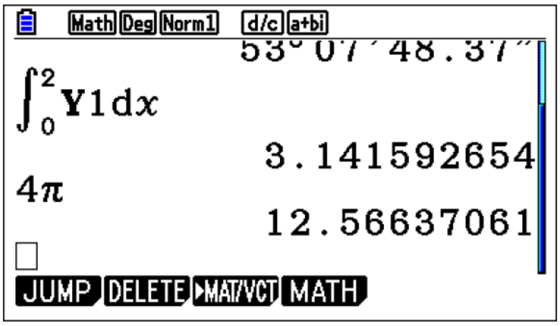
L'àrea de la regió és:

$S_R = \pi$ és igual a l'àrea del cercle de radi 1.

$$S_R = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}dx = 4\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = 4\arctan\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \pi$$

Estimem l'àrea compresa en tot l'eix d'abscisses.





L'àrea total és:

$$S_{Total} = 2\int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}dx = 2\cdot 4\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = 4\pi$$

e)

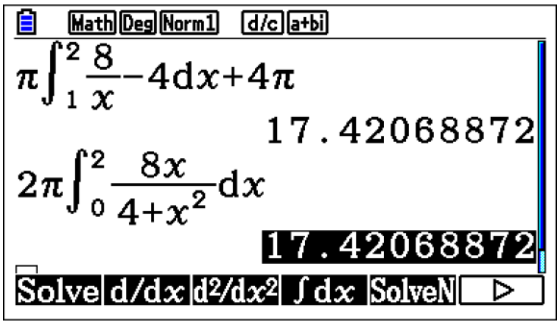
$$f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{\frac{8}{x} - 4}$$

El volum de revolució és igual al volum de revolució de $g(x)$ entre $[1,2]$ més el volum d'un cilindre de radi 2 i altura 1.

$$V_{OY} = \pi\int_1^2 g^2(x)dx + \pi 2^2 \cdot 1$$

O bé:

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x) dx$$



El volum és:

$V_{OY} = 17.42$

$$2\pi \int_0^2 \frac{8x}{4+x^2} dx = 8\pi \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{x^2}{4}} dx = 8\pi \ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi \cdot \ln 2$$

Aquesta corba anomenada d'*Agnesi* en homenatge a la matemàtica italiana Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) que la va citar en el seu llibre publicat en 1748, amb el nom de *versiera* (mal traduïda per *bruixa*) la traducció correcta és *corba*.
L'equació cartesiana de la *corba d'Agnesi* és:

$$y = \frac{8r^3}{4r^2 + x^2}$$