Determineu l'equació de la circumferència C de centre en l'eix d'ordenades i tangent a la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el punt d'inflexió.

Solució:
Calculem el punt d'inflexió de la funció:
$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$f''(x) = 6x - 6$
$f^{(3}(x) = 6$

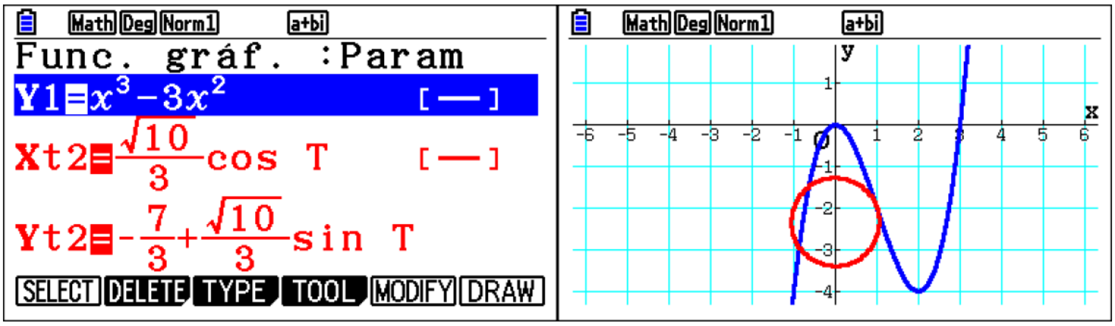
$f''(x) = 0$
Resolent l'equació:
$x = 1$
$f^{(3}(1) = 6 \neq 0$

Aleshores, la funció té un punt d'inflexió quan $x = 1$
Les coordenades del punt d'inflexió són:
$P(1, -2)$

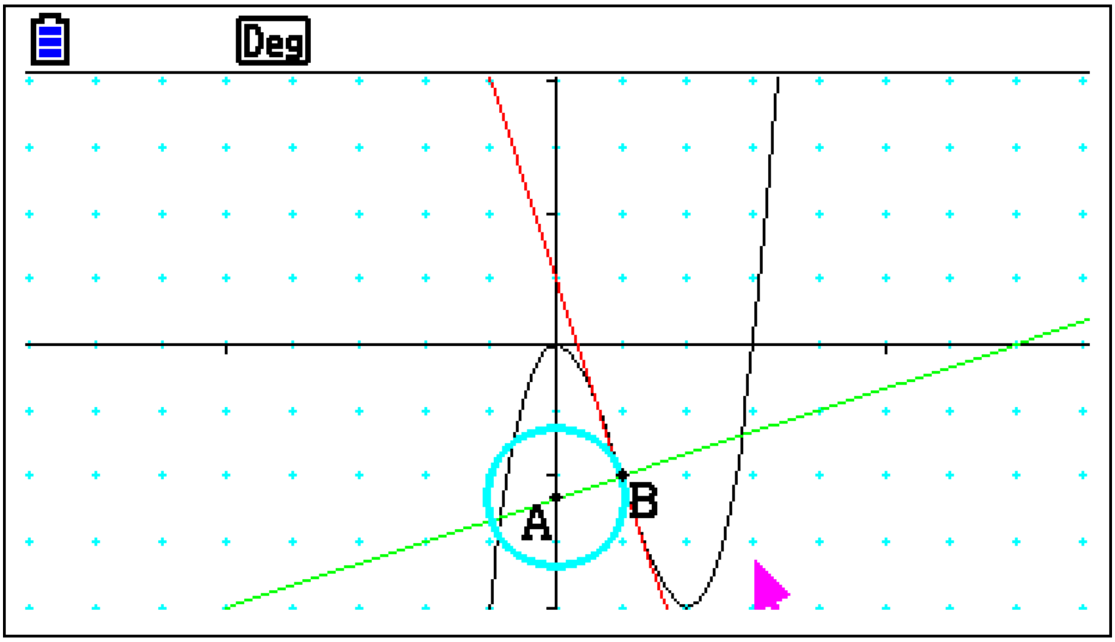
$f'(1) = -3$
La recta normal a la circumferència en el punt $P(1, -2)$ té pendent $-\frac{1}{3}$.
La seua equació és:
$$r_n \equiv y = -\frac{1}{3}(x - 1) - 2$$
Simplificant:
$$r_n \equiv y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$
El centre de la circumferència és el punt on la recta normal talla l'eix d'ordenades.
Les seua coordenades són:
$$O\left(0, -\frac{7}{3}\right)$$
El radi és la mesura del segment $\overline{OP}$
$$\overline{OP} = \sqrt{1^2 + \left(-2 + \frac{7}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$
L'equació de la circumferència és:
$$C \equiv x^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$
En forma paramètrica:
$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{10}}{3}\cos t \\ y = -\dfrac{7}{3} + \dfrac{\sqrt{10}}{3}\sin t \end{cases}$$

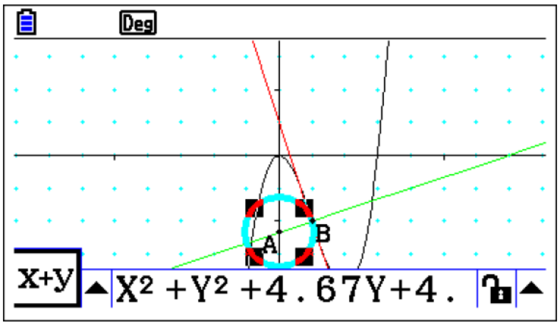
Obrim el *Menú Gráfico*

Definim i representem les funcions $f(x) = x^3 - 3x^2$, $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{3}\cos t \\ y = -\frac{7}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\sin t \end{cases}$



Obrim el *Menú Geometría*
Definim, la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$
Representem els punts $A\left(0, -\frac{7}{3}\right), B(1, -2)$
Definim i representem les rectes tangent i normal.
Determinem l'equació de la circumferència.





L'equació de la circumferència és:

$$C \equiv x^2 + y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{13}{3} = 0$$