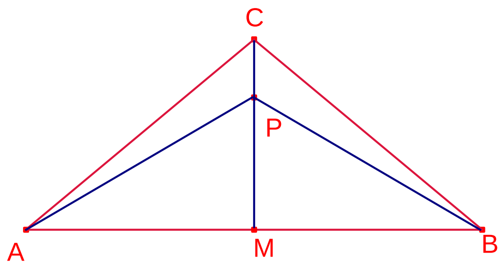
El costat desigual d’un triangle isòsceles mesura 12 i l’altura sobre el costat desigual 5. Determineu el punt d’aquesta altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtexs siga mínima. Calculeu la suma de les distàncies mínima.

Solució:

$\overline{AB} = 12, \overline{AC} = \overline{BC}$



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. $\overline{CM} = 5$.

$\overline{AM} = \overline{BM} = 6$

Siga P un punt en l’altura.

Siga $\overline{PM} = x$.

$\overline{CP} = 5 - x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

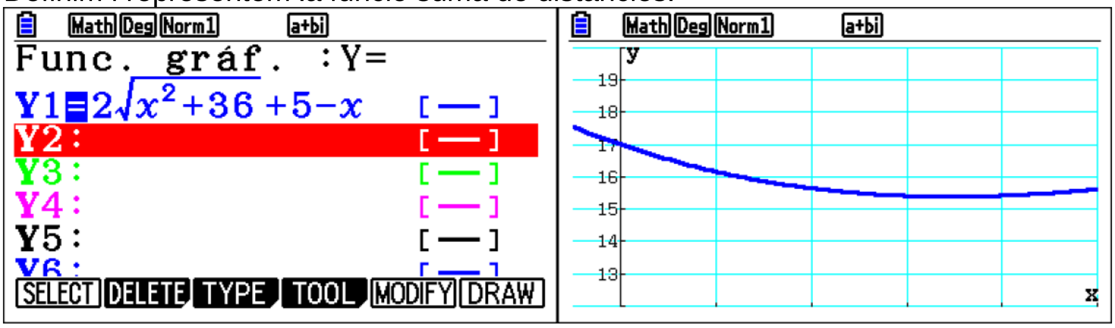
$\overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{x^2 + 6^2}$

La funció a optimitzar és la suma de les distàncies, $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$.

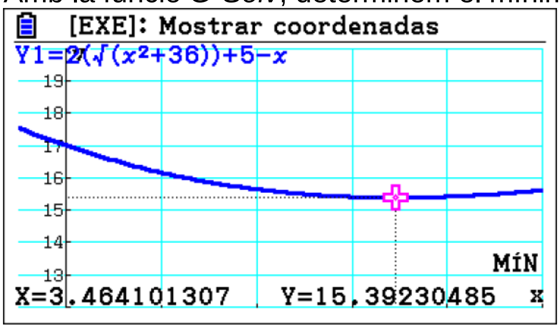
$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x, x \in [0, 5]$

Obrim el *Menú Gràfico*

Definim i representem la funció suma de distàncies.



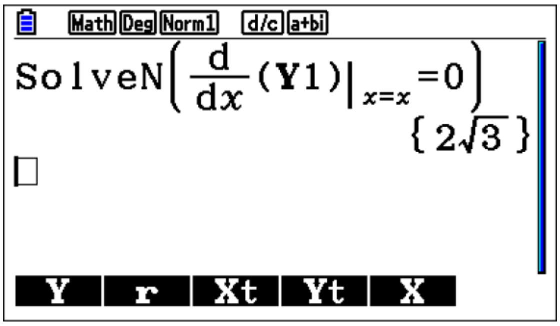
Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:



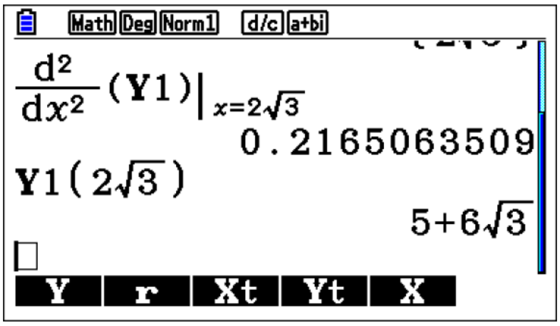
El mínim valor de la suma de les distàncies s’assoleix quan $x \approx 3.4641$

La suma és aproximadament 15.3923

Obrim el *Menú Ejec*-Mat.
Resolem l'equació $\frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x} = 0$



Calculem $\frac{d}{dx^2}(Y1)\Big|_{x=2\sqrt{3}}$, $Y1(2\sqrt{3})$



El mínim valor de la suma de les distàncies s'assoleix quan $x = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$
La suma mínima és $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{6} \approx 15.3923$

Notem que $\angle APM = 60°$, per tant, $\angle APC = \angle BPC = 120°$

Aquesta propietat s'acompleix en qualsevol triangle.
El punt P s'anomena punt de Fermat o d'Steiner del triangle.

Construcció geomètrica del punt de Fermat: