

Determineu l'equació de l'esfera que passe per l'origen de coordenades i per la circumferència d'equació $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$

Solució.

El centre de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ és l'origen de coordenades $O(0, 0, 0)$ el centre de l'esfera de l'esfera que cerquem pertany a la recta perpendicular al plànel $\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$ que passa pel centre de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. El vector director és el característic del plànel $v = (2, -3, 5)$

L'equació de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

El centre de la circumferència és la intersecció de la recta r i el plànel π

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \\ \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases} \end{cases}$$

$$4\alpha + 9\alpha + 25\alpha - 5 = 0$$

$$\alpha = \frac{5}{38}$$

El centre de la circumferència $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$ té coordenades:

$$P\left(\frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38}\right)$$

$$\overline{OP} = d(O, r) = \left| \frac{-5}{\sqrt{38}} \right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Siga Q un punt qualsevol de la circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$$\overline{PQ} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2} = 5\sqrt{\frac{37}{38}}$$

Siga $C(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$ el centre de l'esfera que cerquem.

$$\overline{OC} = \overline{OQ} = \sqrt{38\alpha^2}$$

$$\overline{PC}^2 = \left(2\alpha - \frac{5}{19}\right)^2 + \left(-3\alpha + \frac{15}{38}\right)^2 + \left(5\alpha - \frac{25}{38}\right)^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPQ}$

$$38\alpha^2 = \left(2\alpha - \frac{5}{19}\right)^2 + \left(-3\alpha + \frac{15}{38}\right)^2 + \left(5\alpha - \frac{25}{38}\right)^2 + \left(5\sqrt{\frac{37}{38}}\right)^2$$

Simplificant:

$$\alpha = \frac{5}{2}$$

El centre de l'esfera és:

$$C\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$$

El radi és :

$$\overline{OC} = \sqrt{38 \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{38}}{2}$$

L'equació de l'esfera es:

$$E \equiv (x - 5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{38}}{2}\right)^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem la recta r , el plànol π i l'esfera E .

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Deg Norm1 d/c a+bi <p>Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c]</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">Xo</td> <td style="text-align: center;">Yo</td> <td style="text-align: center;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[2</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">5]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">5</p> <p>EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET</p> </div>	Xo	Yo	Zo	[0	0	0]	a	b	c	[2	-3	5]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Deg Norm1 d/c a+bi <p>aX+bY+cZ+d=0</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[2</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">-5]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">-5</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p> </div>	a	b	c	d	[2	-3	5	-5]
Xo	Yo	Zo																			
[0	0	0]																			
a	b	c																			
[2	-3	5]																			
a	b	c	d																		
[2	-3	5	-5]																		
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Deg Norm1 d/c a+bi <p>$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[5</td> <td style="text-align: center;">-7.5</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">15.411]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">15.41103501</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p> </div>		a	b	c	r	[5	-7.5	5	15.411]												
a	b	c	r																		
[5	-7.5	5	15.411]																		

