

Donada una circumferència de radi $R = 1$, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.

Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $R = 1$.

Siga T el punt de tangència.

Siga el rectangle $ABCD$ tal que el costat $\overline{AB} = a$ és tangent a la circumferència i $\overline{BC} = b$

La funció a optimitzar és:

$$S(a, b) = ab$$

Siga P la projecció de O sobre el costat \overline{BC} .

$$\overline{OC} = \overline{OT} = \overline{PB} = 1, \overline{OP} = \frac{a}{2}, \overline{PC} = b - 1$$

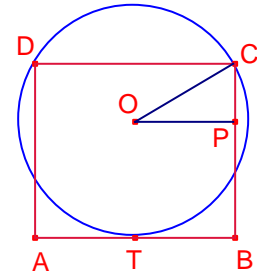
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle OPC :

$$1^2 = (b - 1)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Simplificant:

$$a^2 = 8b - 4b^2$$

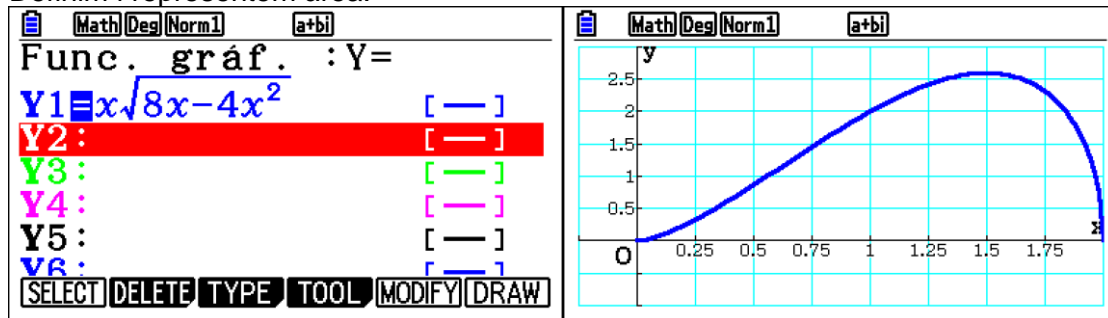
$$a = \sqrt{8b - 4b^2}$$



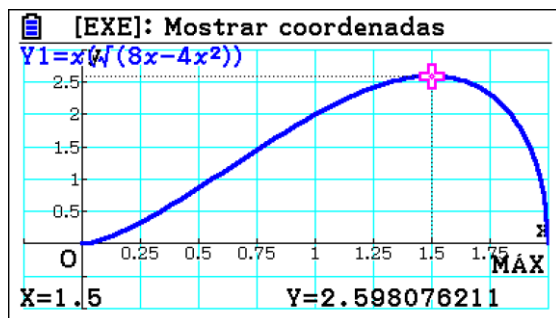
$$S(b) = b\sqrt{8b - 4b^2}, \quad b \in [0, 2]$$

Obrim el *Menú Gráfico*.

Definim i representem àrea.



Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:



El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ cm}$

L'àrea màxima és aproximadament $S_{\text{màx}} \approx 2.5981 \text{ cm}^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Resolem l'equació $S'(b) = 0$

Math Deg Norm1 d/c |a+bi

SolveN $\left(\frac{d}{dx} (Y1) \Big|_{x=x} = 0 \right)$

$\left\{ \frac{3}{2} \right\}$

□

Y r Xt Yt X

Calculem $S(1.5)$, $S'''(1.5)$

Math Deg Norm1 d/c |a+bi

$Y1 \left(\frac{3}{2} \right)$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

□

Y r Xt Yt X

Math Deg Norm1 d/c |a+bi

$\frac{d^2}{dx^2} (Y1) \Big|_{x=\frac{3}{2}}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$-4\sqrt{3}$

□

Y r Xt Yt X

El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ cm}$

L'àrea màxima és $S_{\text{màx}} \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.5981 \text{ cm}^2$