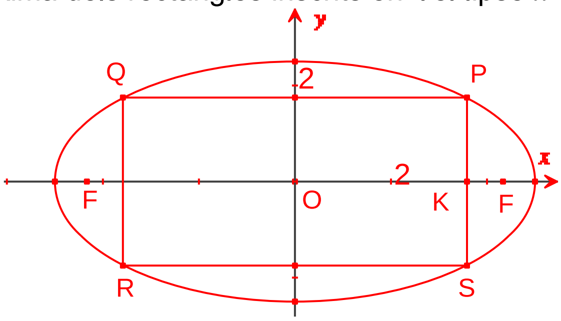
Determineu l’àrea màxima dels rectangles inscrits en l’el·lipse $x^2 + 4y^2 = 25$.



Solució:
L’expressió reduïda de l’el·lipse $x^2 + 4y^2 = 25$ és:

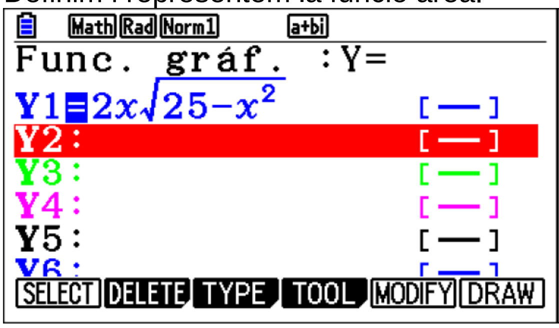
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$$

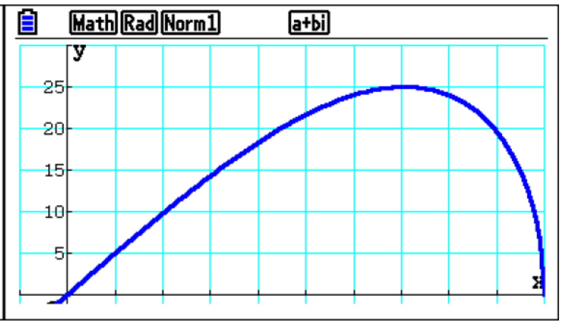
El semieix major és $a = 5$
El semieix menor és $b = \frac{5}{2}$
Siga O el centre de l’el·lipse.
Siga $PQRS$ el rectangle inscrit en l’el·lipse.
Siga $\overline{OK} = x$

$$\overline{KP} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{2}$$

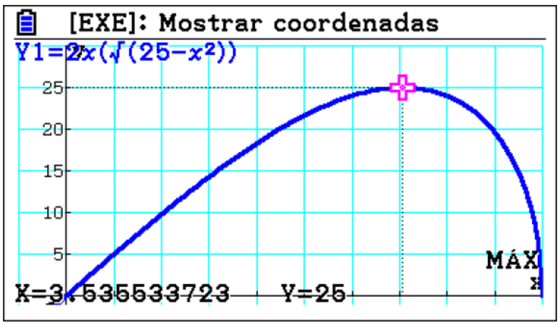
Els costats del rectangle mesuren:
$\overline{PQ} = 2x, \overline{PS} = \sqrt{25 - x^2}$
L’àrea del rectangle $PQRS$ és:
$S(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, x \in [0, 5]$

Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim i representem la funció àrea.



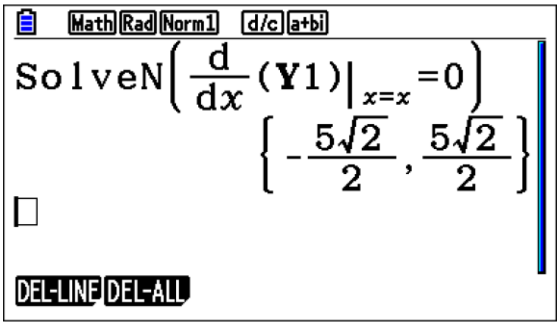


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:

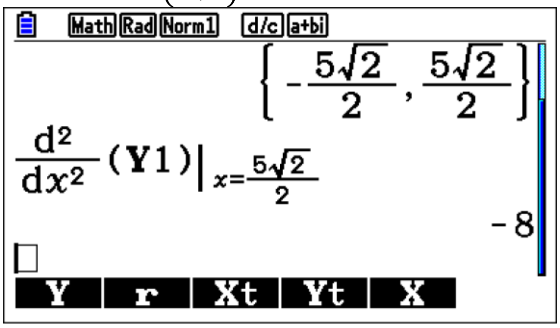


El màxim de l’àrea s’assoleix quan $x \approx 2.5356$ l’àrea màxima és $S = 25$

Obrim el *Menú Ejec-Mat:*
Resolem l'equació $S'(x) = 0$

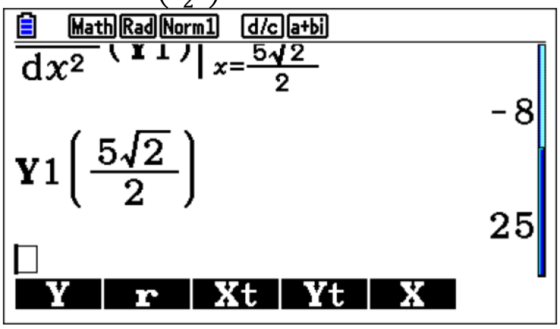


Calculem $S"(5\sqrt{2})$



El màxim s'assoleix quan $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Calculem $S\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$



L'àrea màxima és:

$$S\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$$

Les dimensions del rectangle d'àrea màxima són:

$$\overline{PQ} = 5\sqrt{2}, \overline{PS} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Generalització:

L'àrea màxima dels rectangles inscrits en l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ és:
$S_{màx} = 2ab$, les dimensions dels costats del rectangle $PQRS$ són $\overline{PQ} = a\sqrt{2}, \overline{PS} = b\sqrt{2}$
La proporció entre les àrees del rectangle d'àrea màxima i de l'el·lipse és:

$$\frac{S_{máx}}{S_e} = \frac{2ab}{\pi \cdot ab} = \frac{2}{\pi}$$