Donats els plànols $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12x + 1 = 0, \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$
Es demana.

a) Calcular el volum del cub que té dues cares sobre els dos plànol.
b) Siga el quadrat $ABCD$ que té els vèrtexs $A(2,1,3), B(1,2,3)$, calculeu les coordenades dels vèrtex C i D, sabem que el vèrtex C pertany als plànol π_2 i $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solució:

a)

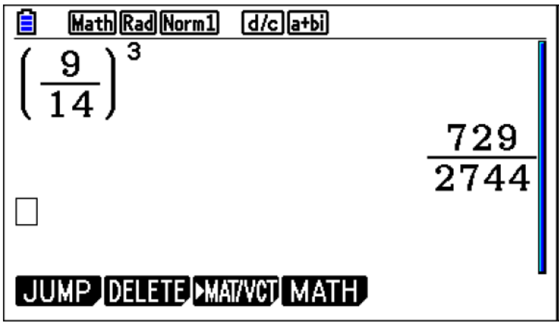
Els plànols π_1, π_2 són paral·lels ja que:

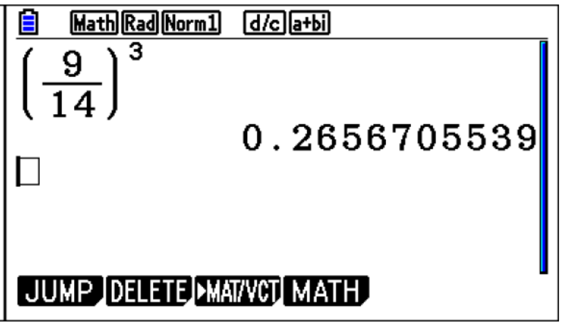
$$\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = \frac{-12}{6} \neq \frac{1}{-5}$$

La mesura de l'aresta del cub és igual a la distància entre els dos plànols.
Siga el $P(-1,-1,0)$ que pertany al plànol π_2.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1) = \left|\frac{4(-1) + 6(-1) - 12 \cdot 0 + 1}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-12)^2}}\right| = \frac{9}{14}$$

El volum del cub és:





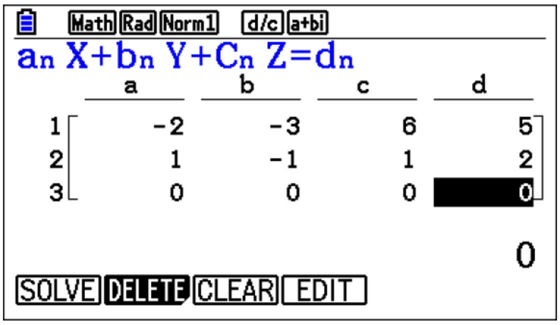
$$V = \left(\frac{9}{16}\right)^3 = \frac{729}{2744} \approx 0.2657\ u^3$$

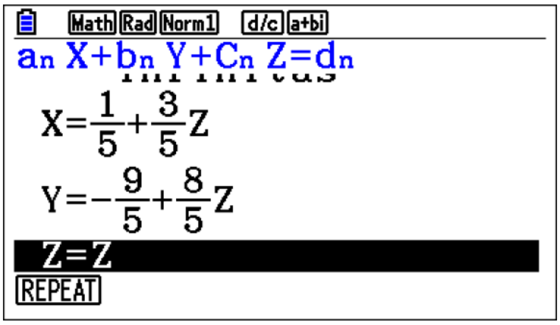
b)

Determinem l'equació paramètrica de la recta intersecció dels plànols π_2, π_3 resolent el sistema format per les dues rectes.

$$r \equiv \begin{cases} -2x - 3y + 6z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Ecuación*.





$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + 3\alpha \\ y = -\frac{9}{5} + 8\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

Les coordenades de C són $C\left(\frac{1}{5} + 3\alpha, -\frac{9}{5} + 8\alpha, 5\alpha\right)$

Els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ són ortogonals i tenen el mateix mòdul.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$
$\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{4}{5} + 3\alpha, -\frac{19}{5} + 8\alpha, -3 + 5\alpha\right)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\frac{4}{5} - 3\alpha - \frac{19}{5} + 8\alpha = 0$
Resolent l'equació:
$\alpha = \frac{3}{5}$
Les coordenades de C són:
$C(2, 3, 3)$
$\overrightarrow{BC} = (1, -1, 0)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$

Siga $D(x, y, z)$
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$
$(2 - x, 3 - y, 3 - z) = (-1, 1, 0)$
$\begin{cases} 2 - x = -1 \\ 3 - y = 1 \\ 3 - z = 0 \end{cases}$
Les coordenades de D són:
$D(3, 2, 3)$