Considerem les següents matrius

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determineu la matriu X tal que $A^t X B^{-1} = C$, A^t és la transposada de A

b) Calculeu el determinant de la matriu $B^{-1}(C^t C)B$, C^t és la transposada de C

Selectivitat, Andalusia 2015

Solució:

a)

Notem que la matriu X és d'ordre 2×3

$\det(A) = -3 \neq 0$, aleshores, la matriu A té inversa.

$\det(B) = 1 \neq 0$, aleshores, la matriu B té inversa.

$A^t X B^{-1} = C$

Multipliquem a l'esquerra per $(A^t)^{-1}$, i a la dreta per B

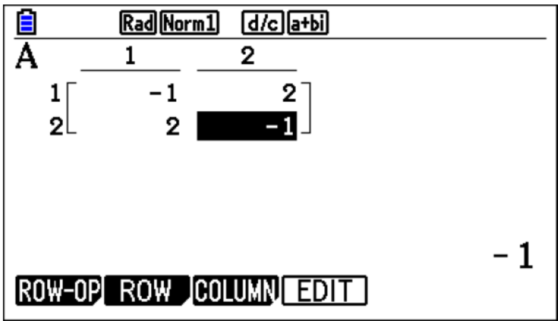
$(A^t)^{-1} A^t X B^{-1} B = (A^t)^{-1} C B$

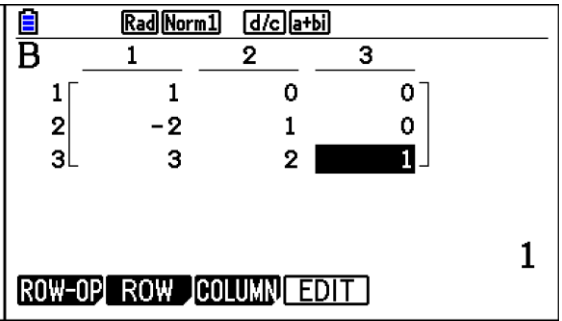
$I_2 X I_3 = (A^t)^{-1} C B$, I_2 matriu unitat d'ordre 2, I_3 matriu unitat d'ordre 3.

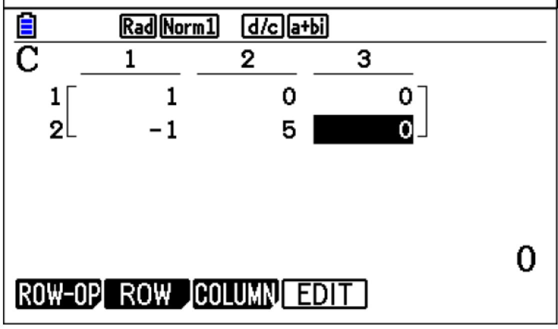
$X = (A^t)^{-1} C B$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim les tres matrius.

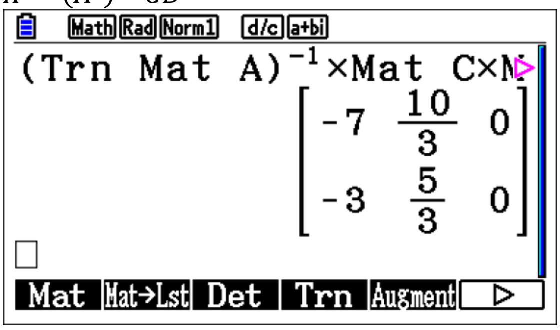






Calculem

$X = (A^t)^{-1} C B$



$$X = \begin{pmatrix} -7 & \frac{7}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

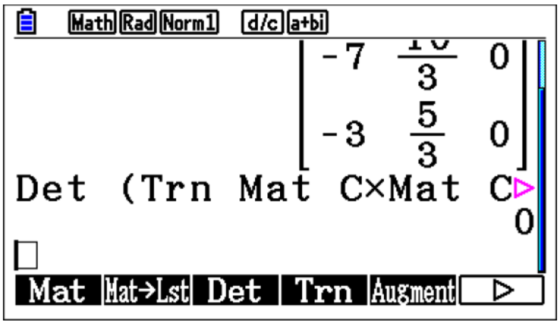
b)

Notem que $C^t C$ és una matriu d'ordre 3×3

Aleshores, és pot efectuar $B^{-1}(C^t C)B$

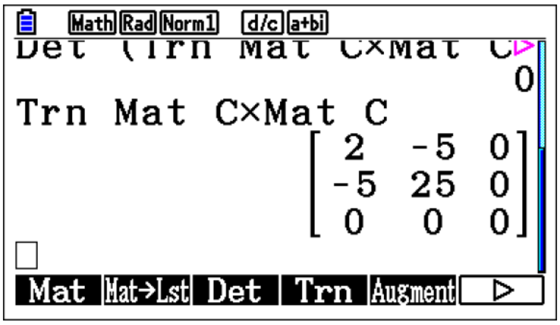
$$\det(B^{-1}(C^t C)B) = \det(B^{-1}) \cdot \det(C^t C) \cdot \det B = \det(C^t C)$$

Calculem $\det(C^t C)$



$$\det(B^{-1}(C^t C)B) = 0$$

Calculem $C^t C$



$C^t C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el determinant és zero que ja la tercera fila de la matriu és zero.