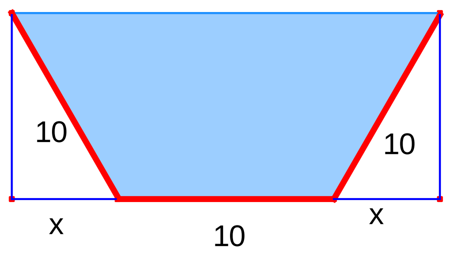
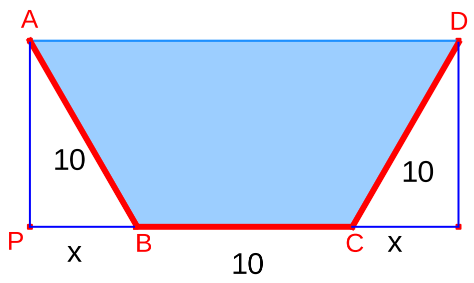
Es desitja construir una canaleta, per recollir aigua, la secció del qual és com la figura. La base i els costats han de mesurar 10 cm i es tracta de donar-li una inclinació adequada als costats per obtenir una secció d'àrea màxima. Es demana:

a) Determinar l'altura del canalet en funció de x (veure figura)
b) Determinar l'àrea de la secció de la canaleta en funció de x
c) Determinar el valor de x que fa màxima l'àrea.



Solució:

a)



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$ l'altura de la canaleta és:

$\overline{AP} = \sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$

b)

La figura és un trapezi isòsceles.

L'àrea és:

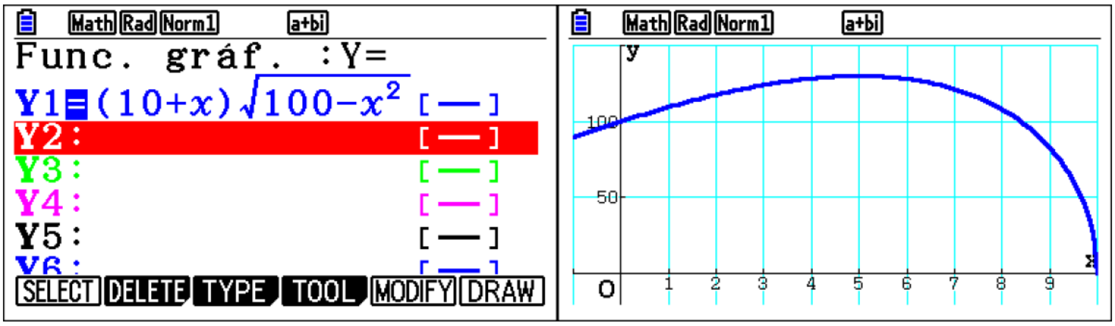
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}\overline{AP}$$

$$S(x) = \frac{20 + 2x}{2}\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0, 10]$$

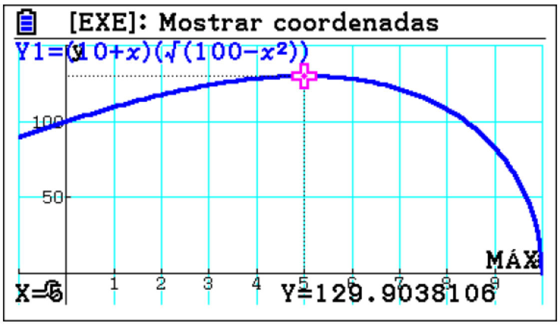
$$S(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$$

Obrim el *Menú Gráfico*.

Definim i representem la funció àrea.

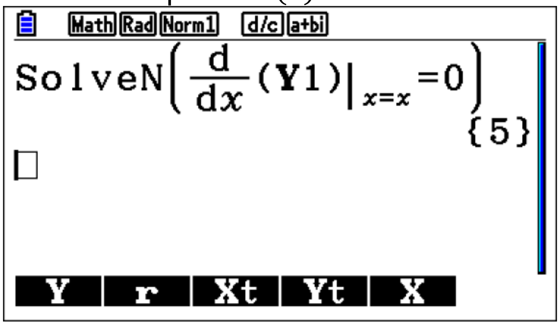


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea.

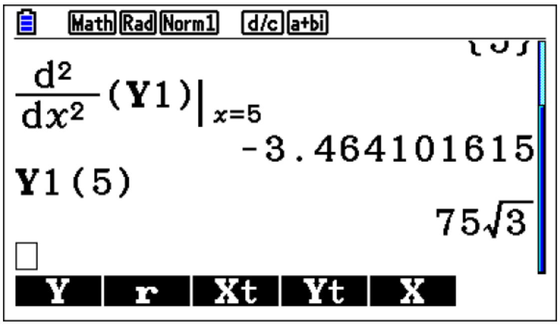


El màxim de la funció s'assoleix quan $x = 5\ cm$
L'àrea màxima és $S = 129.90\ cm^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(5)$ i $S(5)$



El màxim de la funció s'assoleix quan $x = 5\ cm$
L'àrea màxima és $S = 75\sqrt{3} \approx 129.90\ cm^2$

Solució algebraica:
$S(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$
$S(x) = \sqrt{(10 + x)^2(100 - x^2)}$
$S(x) = \sqrt{-x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000}$

El màxim de la funció àrea s'assoleix en el màxim de la funció
$f(x) = -x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000\ x \in [0, 10]$
$f'(x) = -4x^3 - 60x^2 + 2000$
Resolem l'equació $f'(x) = 0$ amb la regla de Ruffini.

$x = 5\ cm$
$f''(x) = -12x - 120x$
$f''(5) < 0$
$f(0) = 10000, f(10) = 0$
$f(5) = 16875$

El màxim de la funció àrea s'assoleix quan $x = 5\ cm$
L'àrea màxima és.
L'àrea màxima és $S = 75\sqrt{3} \approx 129.90\ cm^2$