Tenim les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu que existeix A^{-1}, inversa de A, i calculeu el determinant A^{-1}

b) Calculeu la matriu $B = A(A + 4\cdot I)$

c) Determineu els nombres reals x, y, z, t que compleixen $A^{-1} = xA + y\cdot I$, $A^2 = zA + t\cdot I$.

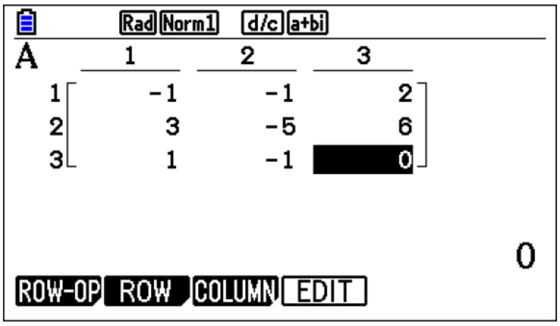
Solució:

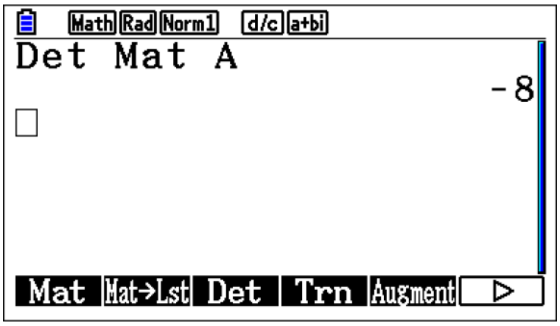
a)

Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim la matriu A y Calculem el determinant.





$|A| = \begin{vmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{vmatrix} = -8$. Aleshores, A té inversa.

$\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N)$.

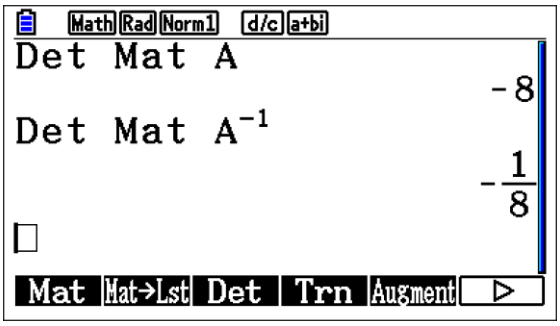
$AA^{-1} = I$.

$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(I) = 1$.

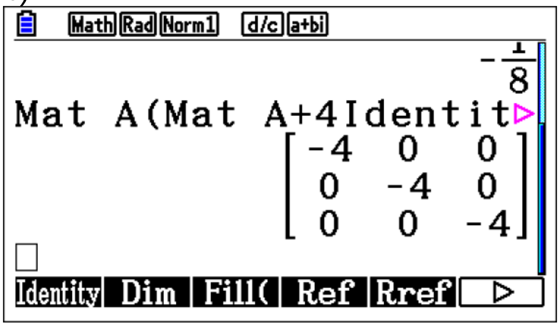
$\det(A)\cdot\det\left(A^{-1}\right) = 1$.

$-8\cdot\det\left(A^{-1}\right) = 1$, aleshores, $\det\left(A^{-1}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

Complrovem el resultat



b)



$$A(A+4\cdot I)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=-4\cdot I$$

c)

$A(A+4\cdot I)=-4\cdot I.$

$A\left(\frac{-1}{4}\right)(A+4\cdot I)=I.$

Aleshores, la matriu inversa de A és $A^{-1}=\frac{-1}{4}(A+4\cdot I)=\frac{-1}{4}A-1\cdot I.$

Aleshores, $x=\frac{-1}{4}$, $y=-1$.

$A(A+4\cdot I)=-4\cdot I.$

$A^2+4AI=-4\cdot I.$

$A^2=-4A-4\cdot I.$

Aleshores, $z=-4$, $t=-4$.