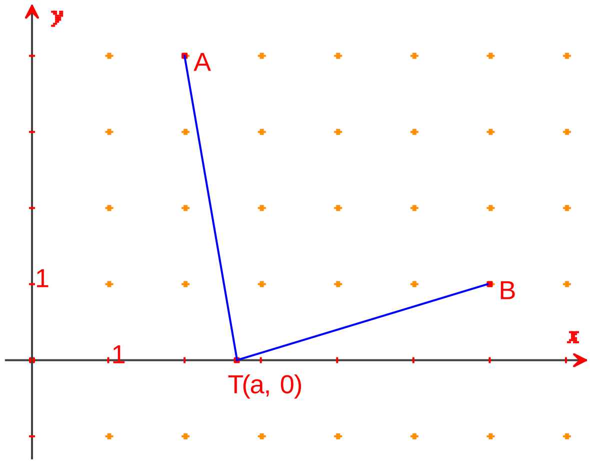
Donats els punts $A(2,4), B(6,1)$.
Determineu el punt de l'eix d'abscisses amb el qual és veu el segment $\overline{AB}$ sota un angle màxim.



Solució 1:

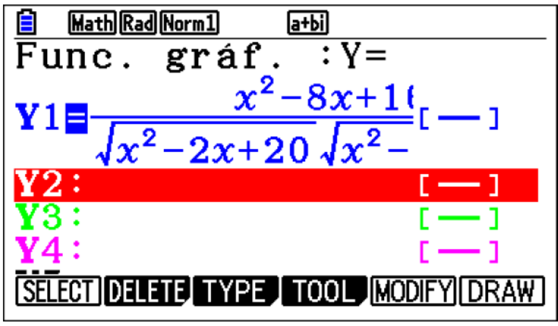
Siga $T(a,0)$.
Siga $\alpha = \angle ATB$
$\overrightarrow{TA} = (2-a,4), \overrightarrow{TB} = (6-a,1)$
Calculem el producte escalar dels dos vectors:
$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = a^2 - 8a + 16 = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}\sqrt{(6-a)^2 + 1^2}\cos\alpha$
Aleshores:

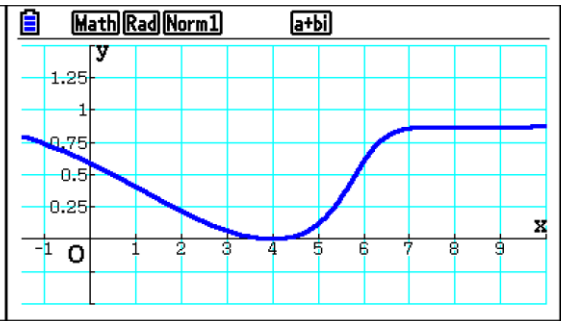
$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}}$$

La funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0,\pi]$
Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:

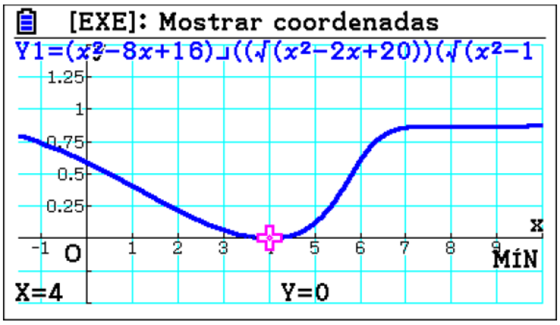
$$g(a) = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}}$$

Obrim el Menú Gráfico.
Definim i representem la funció $g(a)$





Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:



El màxim del angle s'assoleix quan $a = 4$, és a dir, en el punt $T(4,0)$

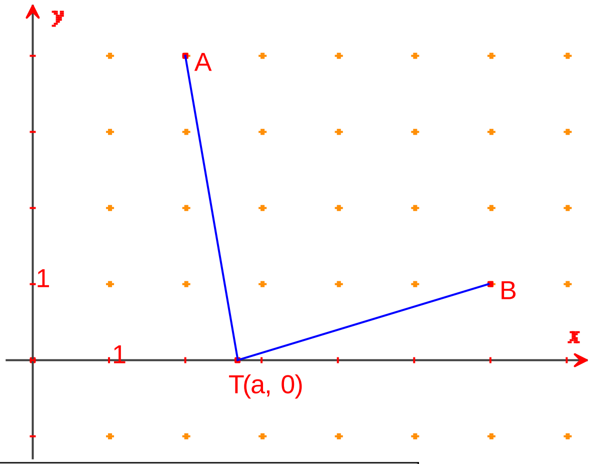
Solució 2:
Siga $T(a, 0)$.
Siga $\alpha = \angle ATB$
Calculem el producte escalar dels dos vectors:
$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = a^2 - 8a + 16 = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}\sqrt{(6-a)^2 + 1^2}\cos\alpha$
Aleshores:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}}$$

La funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0, \pi]$
Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:

$$g(a) = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}} = \frac{(a-4)^2}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}} \geq 0$$

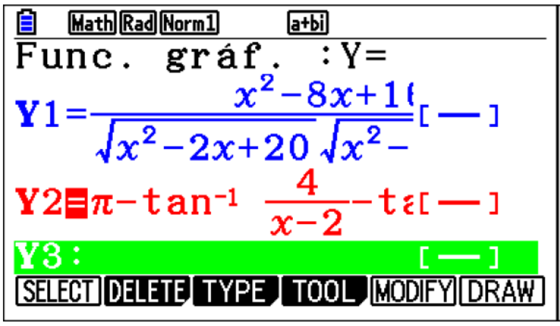
El mínim de la funció $g(x)$ s'assoleix quan numerador és zero:
És a dir, quan $a = 4$,
Aleshores el màxim angle s'assoleix quan $T(4, 0)$

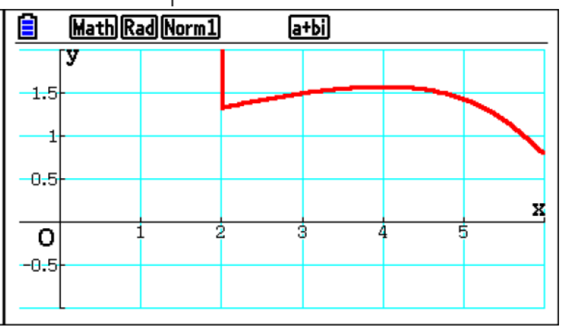


Solució 3:
Siga $T(a, 0), a \in [2, 6]$.
Siga $\beta = \angle ATB$
Aplicant raons trigonomètriques:

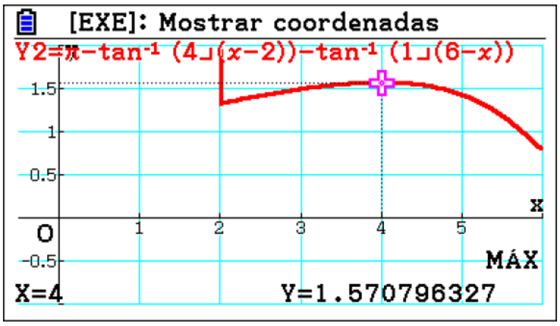
$$\beta = \pi - \arctan\frac{4}{a-2} - \arctan\frac{1}{6-a}, a \in [2, 6]$$

Definim i representem la funció β



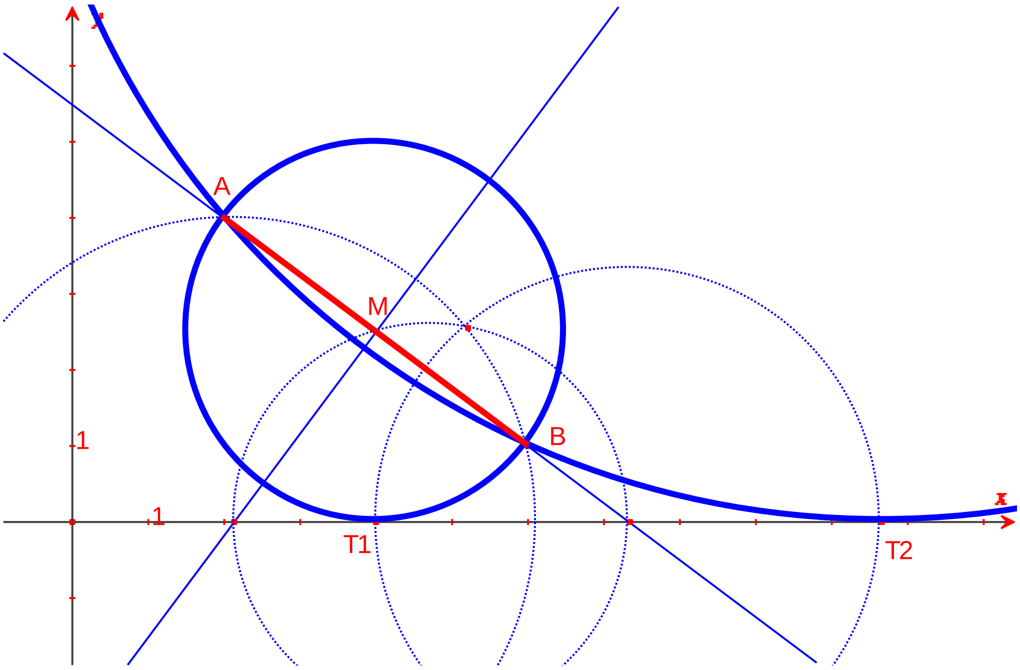


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.



El màxim del angle s'assoleix quan $a = 4$, és a dir, en el punt $T(4, 0)$
L'angle màxim és $\beta = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708\ rad$

Solució 4.



La solució és l'arc capaç del el segment $\overline{AB}$ tangent a l'eix d'abscisses.

El punt mig del el segment $\overline{AB}$ té coordenades $M\left(4,\frac{5}{2}\right)$:

La recta mediatriu del el segment $\overline{AB}$ té equació:

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{17}{6}, \qquad 8x-6y-17=0$$

El centre de la circumferència que passa pels punts A, B té el centre en la recta mediatriu. Les coordenades del centre O són:

$$O\left(x,\frac{4}{3}-\frac{17}{6}\right)$$

La distància del centre O al punt A és igual a la distància del centre o a l'eix d'abscisses:

$$\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{17}{6}-4\right)^2}=\left|\frac{4}{3}x-\frac{17}{6}\right|$$

Resolent l'equació:

$$x=4,\frac{32}{3}$$

Els dos valors són màxims relatius.

Les coordenades dels punts són $T_1(4,0), T_2\left(\frac{32}{3},0\right)$.

$\angle AT_1B=90°, \angle AT_2B\approx 12°41'$

Aleshores, el màxim del angle s'assoleix quan $a=4$, és a dir, en el punt $T(4,0)$ i l'angle màxim és de $90°$.