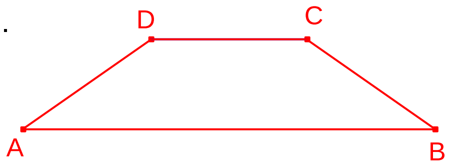
De tots els trapezis isòsceles tal que el costat paral·lel menut i els costats no paral·leles són iguals a $c = 10$, determineu el d'àrea màxima.



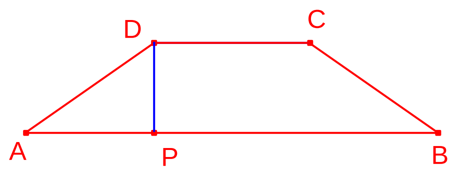
Solució 1:

Siga el trapezi isòsceles $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$.

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = c$

Siga $\alpha = \angle DAB$

Siga P la projecció de D sobre la base $\overline{AB}$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$\overline{PD} = c \cdot \sin\alpha\,, \overline{AP} = c \cdot \cos\alpha$

$\overline{AB} = \overline{CD} + 2 \cdot \overline{AP} = c + 2c \cdot \cos\alpha$

L'àrea del trapezi $ABCD$ és:

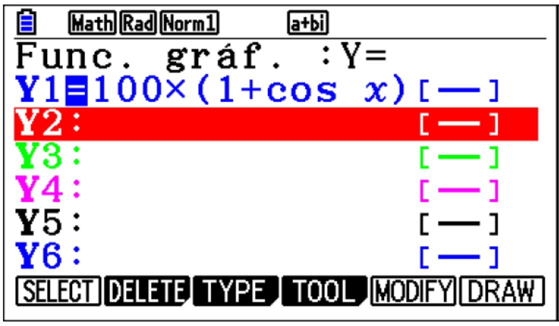
$$S_{ABCC} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{PD}$$

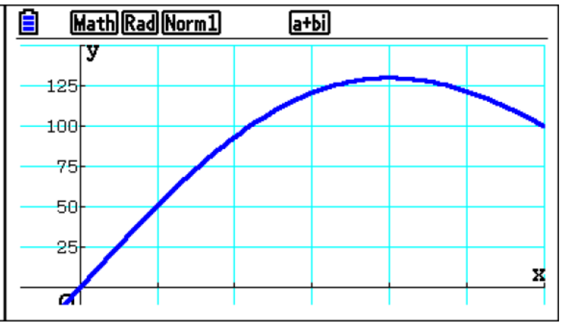
$$S_{ABCD} = \frac{c + 2c \cdot \cos\alpha + c}{2} \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$S(\alpha) = 10^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha\,, \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

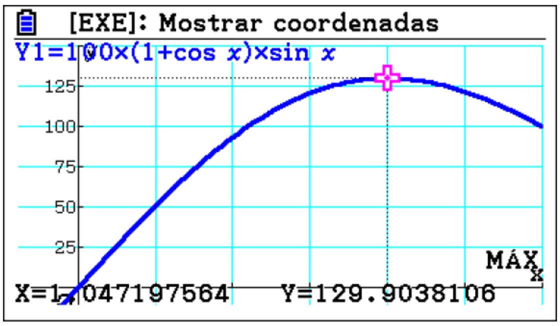
Obrim el *Menú Gráfico*.

Definim i representem la funció àrea.



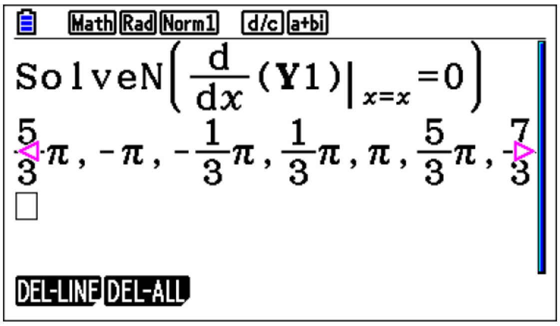


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de l'àrea.

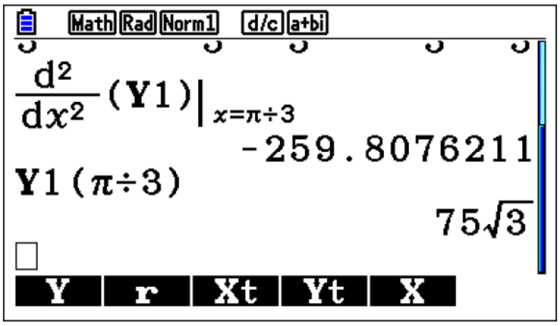


El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ i l'àrea màxima és $S_{màxi} \approx 129.9038$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $S'(\alpha) = 0$



$S'(\alpha) = 0$ quan $\alpha = \frac{\pi}{3}$
Calculem $S''\left(\frac{\pi}{3}\right), S\left(\frac{\pi}{3}\right)$



Aleshores,
El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ i l'àrea màxima és $S_{màx} = 75\sqrt{3} \approx 129.9038$

Solució 2:
L'àrea del trapezi és:

$$S(\alpha) = c^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha, \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Derivem la funció:

$$S'(\alpha) = c^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$$

Resolem l'equació $S'(\alpha) = 0$

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$S''(\alpha) = c^2(-2\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha)$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -c^2\sqrt{3} < 0$$

Aleshores, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu.

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = c^2\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ i l'àrea màxima és $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = c^2\frac{3\sqrt{3}}{4}$.