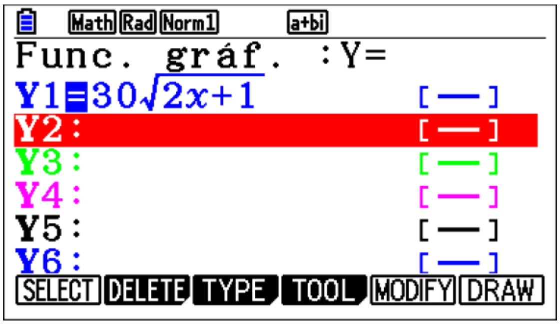
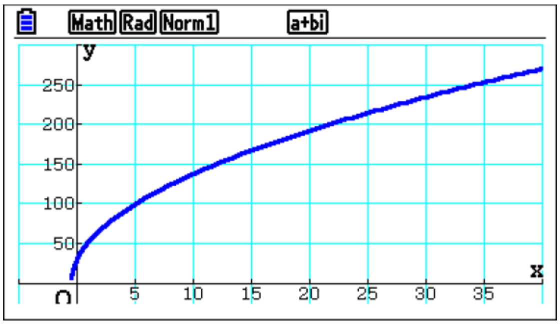
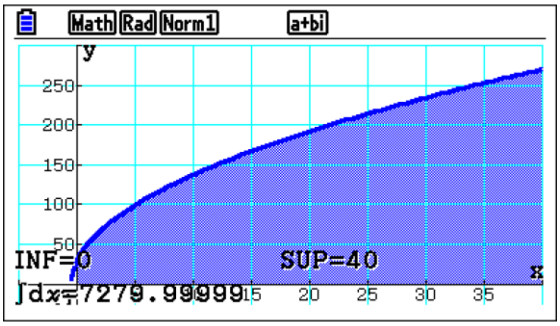
En el plànol XY està dibuixada una parcel·la A els límits de la qual són dos carrers d'equacions $x = 0$ i $x = 40$, respectivament, una carretera d'equació $y = 0$, i el tram del curs d'un riu, d'equació $f(\mathrm{x}) = 30\sqrt{2x+1}$, amb $0 \le x \le 40$, sent positiu el signe de l'arrel quadrada.
Es pretén urbanitzar un rectangle R inscrit en la parcel·la A, de manera que els vèrtexs de R siguen els punts $(\mathrm{x}, 0), (\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x})), (40, \mathrm{f}(\mathrm{x})), (40, 0)$
Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Àrea de la parcel·la A.
b) Els vèrtexs del rectangle R al que correspon l'àrea màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.
Pau's València juliol 2013

Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció $f(\mathrm{x}) = 30\sqrt{2x+1}$



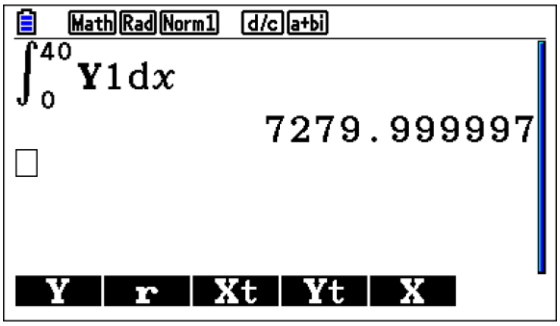


L'àrea de la parcel·la A és:
$$\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}dx$$
Amb la funció *G-Solv*, calculem l'àrea.



L'àrea és $S_A = 7280$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Calculem : $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}dx$



L'àrea és $S_A = 7280$

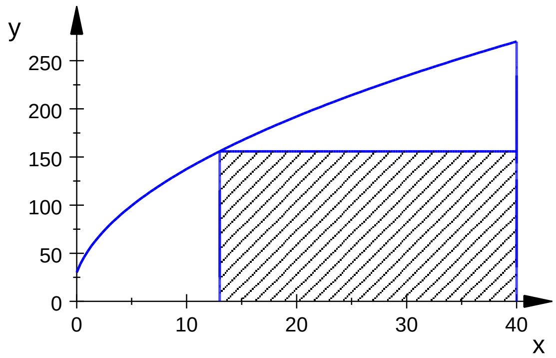
a) Analíticament

Calculem la integral indefinida $\int 30\sqrt{2x+1}dx$
Efectuant el canvi de variable $2x + 1 = t^2$:
$dx = t \cdot dt$

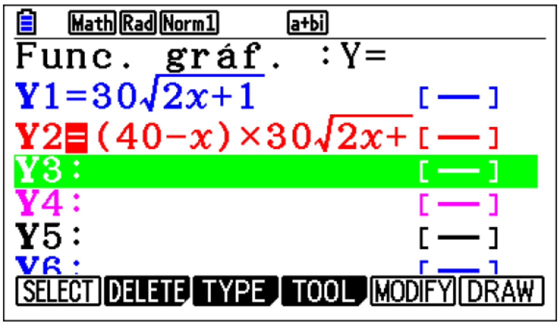
$$\int 30\sqrt{2x+1}dx = 30\int t^2 dt = 10t^3 + C = 10\sqrt{(2x+1)^3} + C$$

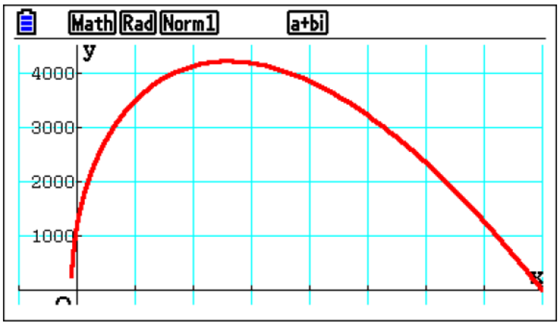
$$\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}dx = \left(10\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Big|_0^{40} = 7280\ u^2$$

b)
La base del rectangle és $40 - x$ i l'altura és $f(x)$. La funció àrea és:
$R(x) = (40 - x)\cdot 30\sqrt{2x+1}, \qquad x \in [0, 40]$

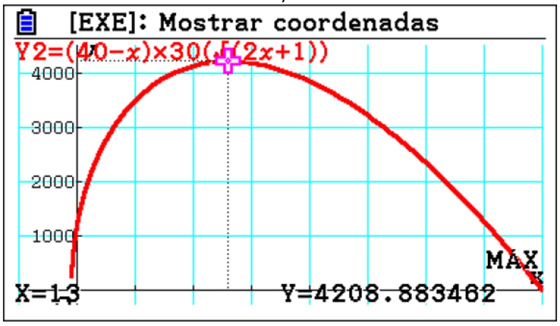


Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i dibuixem la funció àrea $R(x)$



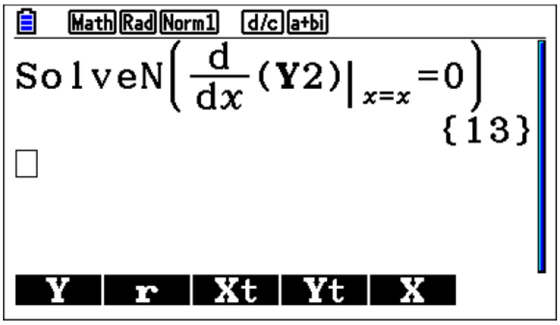


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:

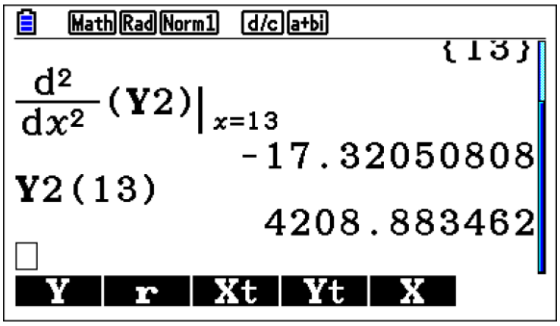


El màxim s'assoleix quan $x = 13$ i l'àrea màxima és $R_{màx} = 4208.8835$

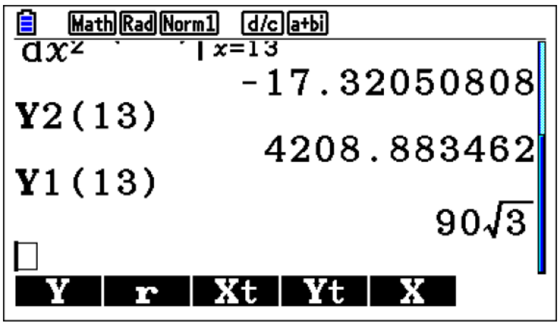
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $R'(x) = 0$



Calculem $R"(13), R(13)$



El màxim s'assoleix quan $x = 13$ i l'àrea màxima és $R_{màx} = 4208.8835$
Calculem els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima



$f(13) = 90\sqrt{3}$
Els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:
$(13, 0), (13, 90\sqrt{3}), (40, 90\sqrt{3}), (40, 0)$

b) Analíticament

Determinem el màxim d'aquest funció amb ajut del càlcul diferencial:

$R'(x) = -\dfrac{30(x-40)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$

$R'(x) = -\dfrac{30(3x-39)}{\sqrt{2x+1}}$

Resolem l'equació $R'(x) = 0$

$3x - 39 = 0$

$x = 13$

Estudiant el signe de la primera derivada:

La funció és estrictament creixent en $x \in]0, 13[$ i estrictament decreixent en $x \in]13, 40[$.

Aleshores, $x = 13$ és un màxim de la funció.

$f(13) = 90\sqrt{3}$

Els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:

$(13, 0), \left(13, 90\sqrt{3}\right), \left(40, 90\sqrt{3}\right), (40, 0)$

c)

L'àrea del rectangle d'àrea màxima és:

$R(13) = 2430\sqrt{3} \approx 420835\, u^2$