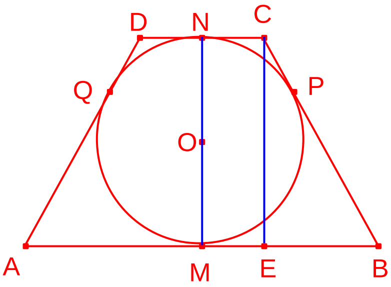
Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscrit a una circumferència de radi 1 m.

Solució:
Siga el trapezi $ABCD$ circumscrit a la circumferència de radi 1.
Siguen M, N, P, Q els punts de tangència.



Siga $a = \overline{BM} = \overline{BP} = \overline{AM} = \overline{AQ}$
Siga $b = \overline{DN} = \overline{DQ} = \overline{CN} = \overline{CP}$
$\overline{MN} = 2$
L'àrea del trapezi és:

$$S(a,b) = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{MN}$$

$$S(a,b) = \frac{2a + 2b}{2} \cdot 2 = 2(a+b)$$

Siga E la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{CE} = 2, \overline{BE} = a - b, \overline{BC} = a + b.$

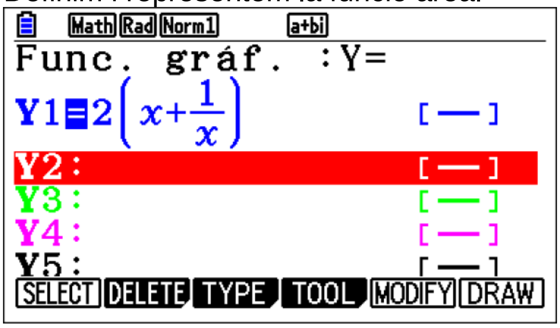
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEC}$:
$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 2^2$
Simplificant:
$ab = 1$, aleshores:

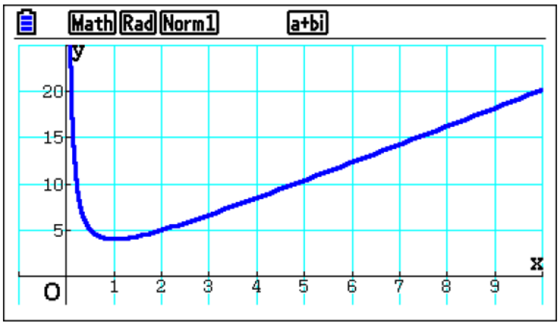
$$b = \frac{1}{a}$$

Substituint en l'expressió de l'àrea:

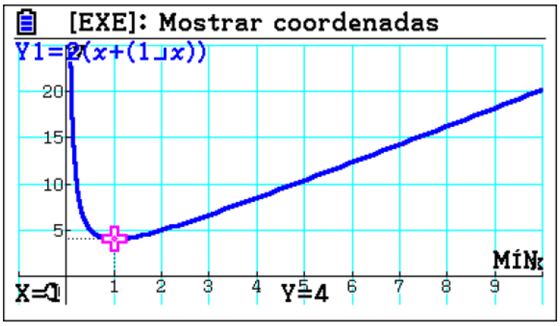
$$S(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right), \qquad a > 0$$

Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim i representem la funció àrea.





Amb la funció G-*Solv*, determinem el mínim de la funció.



El mínim s'assoleix quan $a = 1\ m$ i l'àrea mínima és $S(1) = 4\ m^2$
Per tant, la mínima àrea del trapezi isòsceles circumscrit al cercle de radi 1m s'assoleix quan $\overline{AB} = 2\ m, \overline{CD} = 2\ m$, és a dir quan *ABCD* és un quadrat de costat 2m.

Solució analítica.
L'àrea del trapezi és:
$S(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right), \qquad a > 0$
$S(a) = 2\left(\frac{a^2 + 1}{a}\right), \qquad a > 0$
Calculem la derivada:
$S'(a) = 2\left(\frac{a^2 - 1}{a^2}\right)$
$S'(a) = 0$ quan $a^2 - 1 = 0$
Resolent l'equació
$a = 1$
$S(\mathrm{a}) = \frac{4}{\mathrm{a}^3}, S(1) = 4 > 0$

Aleshores, $a = 1$ és un mínim relatiu estricte.
Per tant, la mínima àrea del trapezi isòsceles circumscrit al cercle de radi 1m s'assoleix quan $\overline{AB} = 2\ m, \overline{CD} = 2\ m$, és a dir quan *ABCD* és un quadrat de costat 2m.
L'àrea mínima és $S(1) = 4\ m^2$.