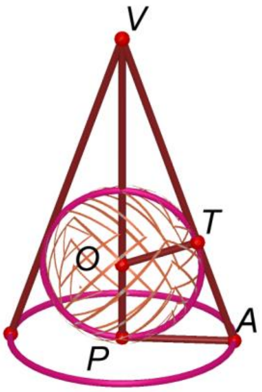
De tots els cons rectes circumscrits a una esfera de radi $r = 2$ determineu les dimensions del que té volum mínim.

Solució.
Considerem una secció axial del con.
La secció passa pel centre O de l'esfera de radi $r = 2$
Siga P el punt de tangència de l'esfera i la base del con.
Siga T el punt de tangència de l'esfera i la superfície lateral del con.
$\overline{OP} = \overline{OT} = 2$

Siga $R = \overline{PA}$ radi cel con.
Siga $h = \overline{PV}$ altura del con
El volum del con és:
$V = \frac{\pi}{3} R^2 h$



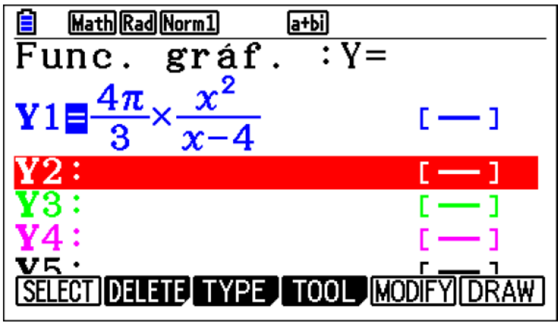
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APV}$, la generatriu del con mesura:
$\overline{AV} = \sqrt{R^2 + h^2}$

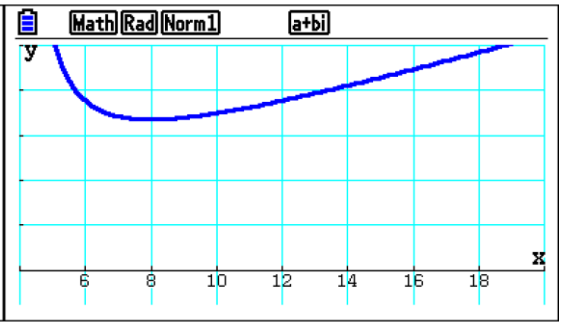
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APV}, \overset{\Delta}{OTV}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h - 2}$

Elevant al quadrat i simplificant:
$R^2 = \frac{4h}{h - 4}$

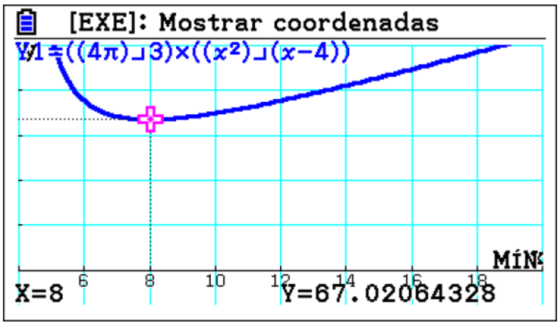
El volum del con és:
$V(h) = \frac{4\pi}{3} \frac{h^2}{h - 4}, \qquad h \geq 4$

Obrim el *Menú Gráfico*
Definim i representem la funció volum.



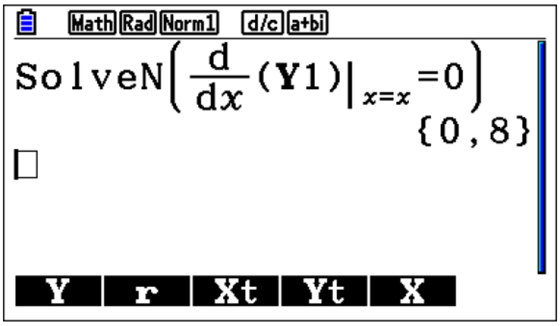


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció volum:

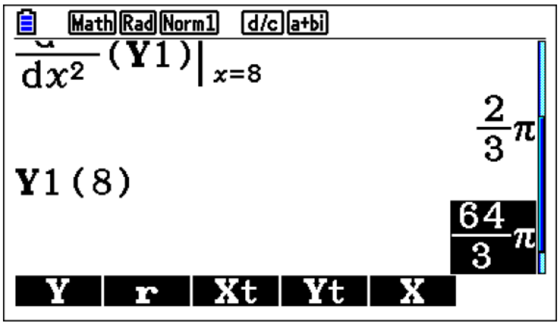


El volum mínim s’assoleix quan $h = 8$, $R^2 = 8$
El volum mínim és $V_{màx} \approx 68.0206$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l’equació $V'(h) = 0$



Calculem $V("8), V(8)$



El volum mínim s’assoleix quan $h = 8$, $R^2 = 8$
El volum mínim és $V(8) = \frac{64\pi}{3} \approx 68.0206$