Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

LA RECTA

Recordeu:

Una **recta** és una funció de la forma $y = mx + n$, on m i n són nombres reals.

m és el pendent de la recta i n és l'ordenada a l'origen. L'ordenada a l'origen ens indica el punt de tall amb l'eix Y: (0, n)

Segons el signe de m:

$$\begin{cases} \text{si } m > 0 & \text{la recta és creixent} \\ \text{si } m < 0 & \text{la recta és decreixent} \\ \text{si } m = 0 & \text{la recta és constant i la seua gràfica és paral·lela a l'eix X} \end{cases}$$

Si n=0 la recta és de la forma $y = mx$, i l'anomenem **funció lineal**. Aquesta funció passa per l'origen de coordenades.

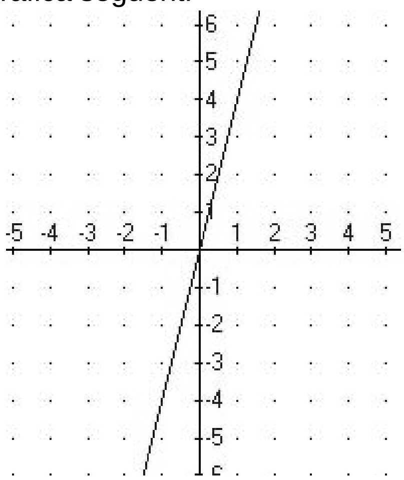
Si n?0 la recta és de la forma $y = mx + n$ i l'anomenem **funció afí**.

Dues rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent i distinta ordenada a l'origen.

Dues rectes són secants si tenen distint pendent. Per treure el punt on es tallen resoldrem el sistema que formen les dues rectes.

Exercicis d'autoaprenentatge

1. Siga la gràfica següent:



a) És una funció lineal?
b) Determina dos punts per on passe la recta
c) Quin és el signe del pendent de la recta?
d) Determina l'equació de la recta.

SOLUCIÓ:

a) És una funció lineal perquè és una recta que passa per l'origen de coordenades.
b) Dos punts d'aquesta recta són el (0, 0) i el (1, 4)
c) El pendent de la recta és positiu perquè la recta és creixent .
d) Per escriure l'equació de la recta sabem el següent:

Tindrà la forma: $y = mx$

Com passa per (0, 0) i (1, 4), compliran l'equació:

Si substituïm $x = 1$ obtindrem que $y = 4$: $4 = m \cdot 1$. Per tant $m = 4$. Hem trobat el valor del pendent.

Aleshores l'equació és $y = 4x$.

2. Donada l'equació $y = -\frac{1}{2}x$, feu un estudi de totes les característiques que té la funció abans de dibuixar-la, i després dibuixeu-la.

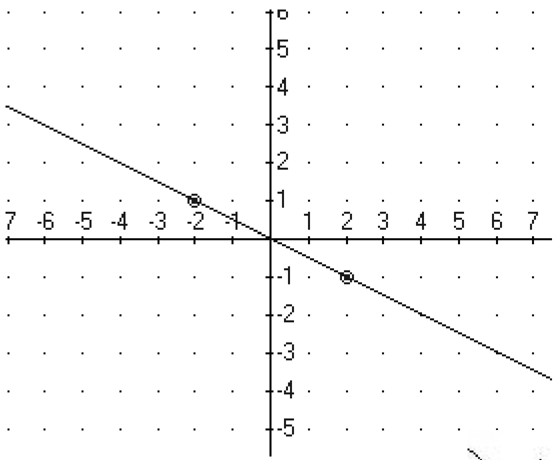
SOLUCIÓ:

És una funció lineal amb el pendent negatiu. Aleshores la nostra recta passa per l'origen de coordenades , és decreixent i passa pel segon i quart quadrant.

Per dibuixar-la farem una taula de valors:

x	2	–2
y	–1	1

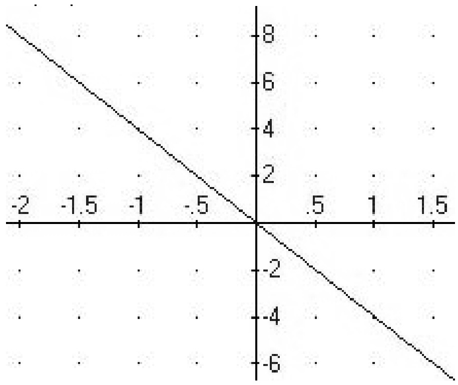
Dibuixem-la:



3. Doneu un valor de m perquè la recta corresponent a $y = mx$ tinga una inclinació major que $y = -4x$. Quin és el conjunt de valors de m que fan possible l'afirmació anterior?

SOLUCIÓ:

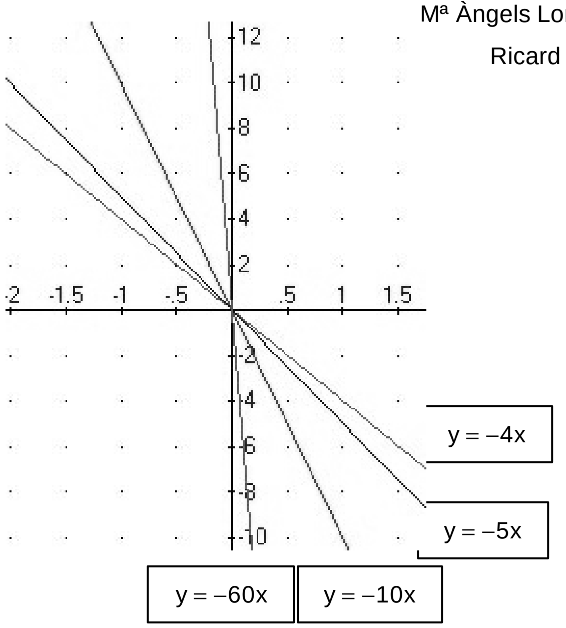
Si dibuixem la funció $y = -4x$ tenim:



La recta $y = -4x$ té pendent negatiu i amb "molta" inclinació. Si donem valors a m més menuts que –4 obtindrem rectes amb més inclinació que la donada perquè pel mateix valor de x, per exemple el valor de la recta es fa més gran en els negatius i més menut als positius.

Aleshores el conjunt de valors de m que fan que les rectes $y = mx$ tinguen més inclinació que $y = -4x$ són tots els nombres reals més menuts que –4:

$m \in R$, tal que $m < -4$.



4. Contesteu veritable o fals a les següents afirmacions referides a la funció $y = -\frac{1}{2}x + 1$, raonant les respostes:

a) És una funció lineal de pendent –0,5
b) La seua gràfica talla a l'eix Y per baix l'origen.
c) És una recta decreixent.
d) El punt (–4, 3) pertany a aquesta recta.

SOLUCIÓ:

a) És una afirmació falsa.

Aquesta no és una funció lineal, perquè és de la forma $y = mx + n$, per tant és una funció afí.

El pendent és –0,5.

b) És una afirmació falsa.

La seua gràfica talla a l'eix Y al punt (0, 1) que no està a sota l'origen de coordenades.

c) És una afirmació vertadera.

Com el pendent d'aquesta recta és negatiu, és una recta decreixent.

És una afirmació vertadera.

Si en la funció substituïm $x = -4$ obtenim $y = 3$, $3 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 1$.

5. Representeu gràficament la funció $f(x) = -2x + 4$

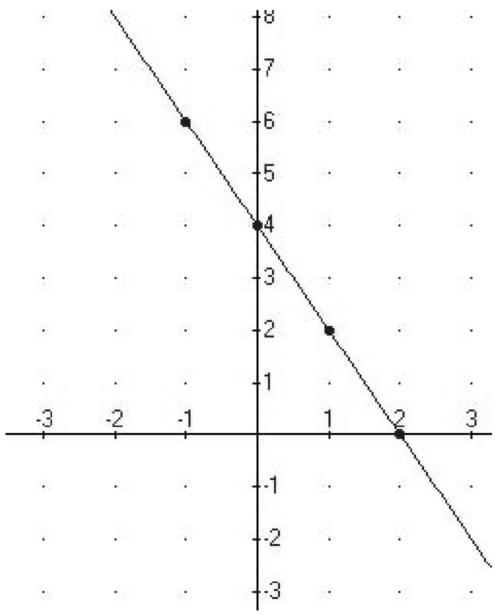
Per dibuixar una recta $f(x) = mx + n$ cal estudiar el pendent m que ens dirà si es creixent o decreixent la funció.
Determinar el punt de tall amb l'eix d'ordenades que és (0, n)
Determinar dos punts de la funció.
Determinar el punt de tall amb l'eix d'abscisses, $f(x) = 0$. Per a la qual cosa resoldrem l'equació $mx + n = 0$

SOLUCIÓ:
El pendent de la recta és –2, per tant la funció és decreixent.
L'ordenada en l'origen és 4, per tant la funció talla l'eix d'ordenades en el punt (0, 4).

Busquem dos punts de la recta

x	f(x)
?1	6
1	2

El punt de tall amb l'eix d'abscisses és:
$f(x) = 0$, $-2x + 4 = 0$, $x = 2$ és a dir el punt $(2, 0)$.



És convenient calcular algun altre punt de la recta.

6. Calculeu el valor de a perquè la recta $y = ax + (2a + 3)$ siga paral·lela a la recta $y = 2x + 5$. Quina és la distancia vertical entre ambdues rectes?

SOLUCIÓ:

Perquè dues rectes siguen paral·leles cal que tinguen el mateix pendent.

$$\left.\begin{array}{r}\text{El pendent de la primera recta és}: m = a \\ \text{El de la segona és}: m = 2\end{array}\right\} \text{si igualem} \quad a = 2.$$

Substituïm a per 2: $y = 2x + 4 + 3 \Rightarrow y = 2x + 7$

Ja tenim les dues rectes: $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$. La primera talla a l'eix Y en (0, 5) i la segona en (0, 7). La distància vertical entre ambdues és $7 - 5 = 2$.

7. Amb un cordó de 1 metre de llarg lligat pels extrems, construïm rectangles.

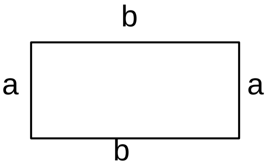
a) Trobeu l'alçada dels rectangles que tenen per base 15 cm, 25 cm, 30 cm i 45 cm respectivament.

b) Representeu les dades anteriors gràficament.

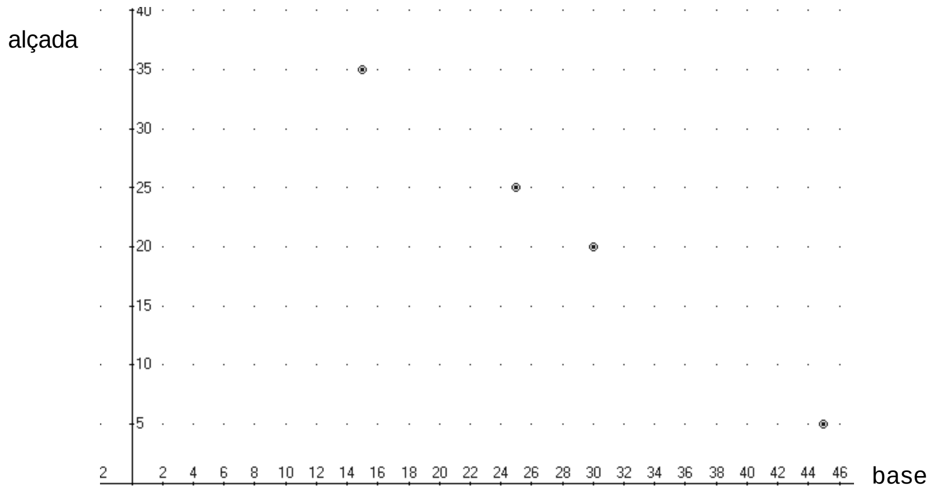
c) Determineu la funció que us permeta trobar l'alçada de qualsevol rectangle donada la seua base.

d) Quin és el pendent de la recta que relaciona la base i l'alçada?
e) Què li passa a l'alçada si augmentem la base? Per què?

SOLUCIÓ:
a) Per trobar l'alçada dibuixem el rectangle:



Aleshores tenim dos costats de longitud b i altres dos de longitud a.
La suma dels quatre costats, que és el perímetre, ha de ser $1m = 100cm$.
El perímetre del rectangle és $2a + 2b = 100$.
Si tenim un rectangle de base 15 cm
$2a + 2 \cdot 15 = 100$, per tant, $a = 35cm$
El primer rectangle té una b = 15 cm i una a = 35 cm.
Anàlogament, si la base és $b = 25cm$, l'alçada és $a = 25cm$. Si la base és $b = 30cm$, l'alçada és $a = 20cm$, Si la base és $b = 45cm$, l'alçada és $a = 5cm$
b) Tenim les següents dades: (15, 35), (25, 25), (30, 20) i (45, 5)
Representem als eixos. Realment dibuixem el primer quadrant:
A l'eix d'abscisses representarem les bases i al d'ordenades les alçades, totes dues en centímetres.



c) Tenim que el perímetre de tots aquests rectangles és 1 metre (=100 cm), i que sempre ens donen la base. Aleshores, a aquesta funció b serà la variable independent i a serà la variable dependent. La funció ve donada pel perímetre:
$2a = 100 - 2b$. Aïllem la variable dependent:

$$2a = 100 - 2b \Rightarrow a = \frac{100 - 2b}{2} \Rightarrow a = -b + 50$$

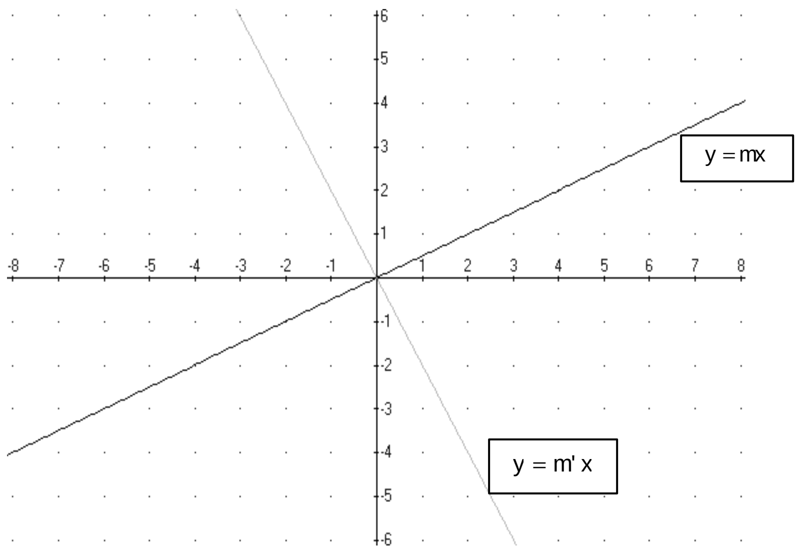
Aleshores hem trobat la funció afí que representa la relació entre la base i l'alçada d'un rectangle de perímetre 1m: $a = -b + 50$.
d) El pendent és –1. És una recta decreixent.
e) L'alçada disminueix quan augmentem la base, perquè tenim una corda d'un metre que és la mesura del perímetre de tots aquests rectangles.

Exercicis proposats:

1. Estem a la porta d'un forn i hem anotat el següent: una dona ha comprat sis barres de pa i ha pagat 2,7€; un iaio ha pagat per 2 barres 0,9€ i un amic meu que té família nombrosa n'ha comprat 8 i ha pagat 3,6€. Feu un estudi del preu de la barra de pa tabulant les dades, dibuixant els punts i escrivint, si és possible, la funció lineal corresponent al preu de la barra de pa.

2. Siga la funció lineal: $y = 3x$.
Només observant la funció, què en pots dir? És creixent? Quin és el seu pendent?
Dibuixeu-la.

3. Segons la figura següent contesta veritable o fals, raonant la resposta:
a) $m' > m$ b) $m' < 0$ c) $m<0$

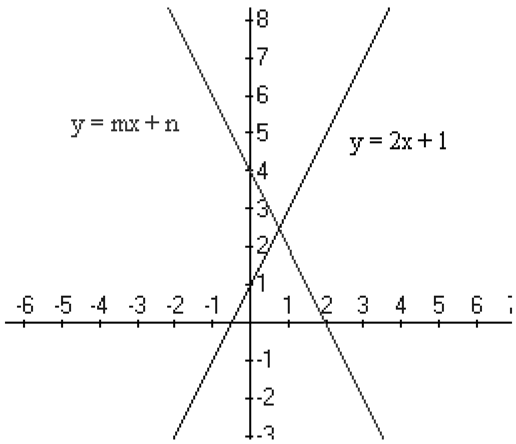


4. Determineu una funció que transforme pessetes en euros. És una funció lineal?. Dibuixeu-la.

5. Som a una cabina telefònica i abans de cridar per telèfon llegim la informació sobre les despeses. A aquesta cabina ens costa cada 2 segons 0'6 €. No hi ha despeses al despenjar el telèfon. Si la nostra conversa durara $\frac{1}{3}$ de minut, quant ens costarà?. I si fem una altra trucada de minut i 20 segons? Determineu la funció que representa les despeses d'aquesta cabina.

6. Segons la figura contesteu veritable o fals a les afirmacions següents raonant la resposta:

a) $m > 2$ b) $n = 1$ c) $m < 2$ d) $m < 0$, i $n = 4$



7. Completa la taula :

Funció	Tipus	Pendent	Ordenada a l'origen	Creixement o decreixement
$y = -2x$			0	
$y = x + 3$	afí			creixent
$y = -4$				constant
$y = -x + 10$		-1		
$y = \frac{1}{3}x$	lineal			
$y =$		5	-2	

8. Determineu les equacions de les rectes:

a) La recta que passa per (–1, 3) i (2, –3). Dibuixeu-la.

b) La recta que passa per (0, 6) i és paral·lela a la recta $y = 2x - 3$.

c) La recta que passa per (1, 3) i (2, 5).

d) La recta que té pendent –1 i passa per (2, -1).

e) La recta que passa per l'origen i és paral·lela a $y = -3x + 5$.

f) La recta que passa per (0, -5) i té pendent $\frac{-1}{2}$

g) La recta que passa per (0, 2) i per (-1, 0).

9. En les següents rectes digueu quin és el seu pendent i calculeu l'equació d'una paral·lela que passe per (1, 1).

a) $y = 3x + 5$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

c) $y = -x + 1$

d) $y = x - 1$

10. En una línia d'autobús, el bitllet costa 1.5 €, més 0.2 € per cada quilòmetre de trajecte. Escriviu la funció que relaciona el nombre de quilòmetres recorreguts amb el preu del viatge. Quants quilòmetres podem fer en aquesta línia amb 6.5 €.

11. Dibuixeu les gràfiques següents:

a) $y = x + 3$

b) $y = 5 - x$

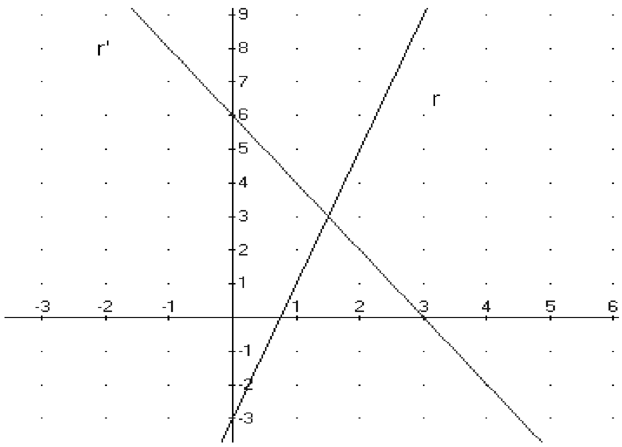
c) $4(y - x) = 3(1 - x)$

d) $y = 20(x - 2)$

e) $3x - y = -1$

12. Una companyia telefònica cobra 12 € pel lloguer del telèfon al mes i 0'12 € per cada pas de conversació. Calculeu les despeses d'una família si ha fet els passos següents : 17 passos a la primera setmana del mes, 24 a la segona, 15 a la tercera i 34 a la quarta. Calculeu les despeses de cada setmana i del mes. Determineu una funció que represente les despeses telefòniques al mes.

13. Calculeu les equacions de les rectes r i r' de la figura:



14. Calculeu les equacions de les rectes que determinen els costats del triangle i després comprova que els vèrtex són les solucions dels sistemes que determinen aquestes rectes dos a dos.