Mª Àngels Lonjedo

Ricard Peiró

LA FUNCIÓ QUADRÀTICA.

Recordeu:

$y = ax^2 + bx + c$ és la funció quadràtica.
La seua gràfica és una paràbola.
L'orientació de la paràbola depén del signe de a:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ branques cap a dalt} \rightarrow \text{funció cóncava} \\ a < 0 \text{ branques cap a baix} \rightarrow \text{funció convexa} \end{cases}$$

L'eix de simetria ve donat per la recta $x = \dfrac{-b}{2a}$

El vèrtex de la paràbola té per abscissa $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
L'ordenada la trobarem substituint aquest valor de x_0 a la funció.
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses venen donats per les dues solucions de l'equació de segon grau $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Són: $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.
El punt de tall amb l'eix d'ordenades ve donat pel punt (0, c).

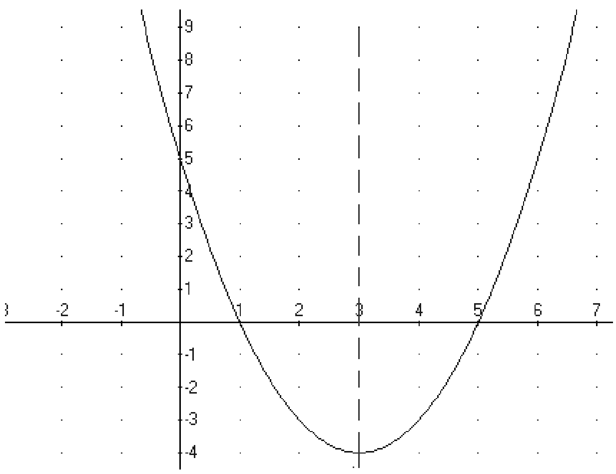
Exercicis d'autoaprenentatge:

1. Siga la funció : $y = x^2 - 6x + 5$. Estudieu-la i dibuixeu-la.

SOLUCIÓ:
És una paràbola amb les branques cap a dalt, perquè $a = 1 > 0$.
L'eix de simetria és la recta $x = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$.
El vèrtex té per abscissa: $x_0 = 3$ i per ordenada: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$
Aleshores el vèrtex és el punt (3, –4)
Pels punts de tall amb l'eix d'abscisses fem : $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Resolem i obtenim:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}.$$

Aleshores els punts de tall són: (5, 0) i (1, 0)
El punt de tall amb l'eix d'ordenades és (0, 5).



2. Calculeu una funció quadràtica que passe pels punts (0, 1) (1, 0) i (–2, 9).
SOLUCIÓ:

Estem buscant una funció del tipus $y = ax^2 + bx + c$.

El punt de tall amb l'eix d'ordenades és: (0, 1).
És a dir, si substituïm $x = 0$ obtenim $y = 1$.

Per altra banda si substituïm en la funció $x = 0$, obtenim $y = c$

Aleshores, c = 1.

De moment tenim : $y = ax^2 + bx + 1$. Ens falta determinar a i b.

Com coneixem dos punts més d'aquesta paràbola (1, 0) (–2, 9) substituïm:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 1 \\ 9 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 1 \end{array}\right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = a + b + 1 \\ 9 = 4a - 2b + 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a - b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 3a = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ a = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b = -2 \\ a = 1 \end{array}\right\}$$

Aleshores, la funció quadràtica és: $y = x^2 - 2x + 1$.

Exercicis proposats:

1. Una funció quadràtica de la forma $y = ax^2 + bx + 1$ pren el valor 7 per a $x = -1$ i per a $x = 2$. Determineu aquesta funció.

2. Siga la funció $f(x) = x^2 + mx + m$. Determineu m sabent que la gràfica passa pel punt $(2, 7)$.

3. Siga la funció $f(x) = x^2 + mx + n$. Determineu m i n sabent que la gràfica passa pels punts $(1, 0), (-3, 4)$.

4. Siga la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determineu a, b, c sabent que la gràfica passa pels punts $(1, 0), (0, 0), (-1, 2)$.

5. Dibuixeu les següents funcions quadràtiques:

a) $y = x^2 - 6x + 10$
b) $y = x^2 - 4x + 4$
c) $y = -x^2 - 4x - 2$
d) $y = x^2 - 4$
e) $y = -2x^2 - x + 6$
f) $y = x^2 + 2x + 2$

6. Una funció quadràtica ve donada per la taula següent:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	17	10		2	1		5		17

a) Acabeu d'omplir la taula tenint en compte la simetria.
b) ¿Podeu determinar la fórmula que defineix aquesta funció?
c) ¿Té valors negatius aquesta funció?.

7. Determineu una funció que calcule el producte de dos nombres que sumen 32. ¿Quin tipus de funció és?. Dibuixeu-la.

8. Representeu en els mateixos eixos de coordenades les funcions següents:
$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 + 2 \quad h(x) = x^2 - 4 \quad m(x) = x^2 + 4$
En què s'assemblen i es diferencien les funcions.

9. Representeu en els mateixos eixos de coordenades les funcions següents:
$f(x) = -2x^2 \quad g(x) = -2x^2 + 2 \quad h(x) = -2x^2 - 2 \quad m(x) = -2x^2 + 8$
En què s'assemblen i es diferencien les funcions.

10. Representeu en els mateixos eixos de coordenades les funcions següents:
$f(x) = x^2 \quad g(x) = (x+2)^2 \quad h(x) = (x-3)^2 \quad m(x) = (x+4)^2$
En què s'assemblen i es diferencien les funcions.

11. Representeu en els mateixos eixos de coordenades les funcions següents:
$f(x) = -2x^2 \quad g(x) = -2(x+2)^2 \quad h(x) = -2(x-3)^2 \quad m(x) = -2(x+4)^2$
En què s'assemblen i es diferencien les funcions.

12. Representeu en els mateixos eixos de coordenades les funcions següents:
$f(x) = x^2 \quad g(x) = (x+2)^2 + 1 \quad h(x) = (x-3)^2 - 4 \quad m(x) = (x+4)^2 + 2$
En què s'assemblen i es diferencien les funcions.

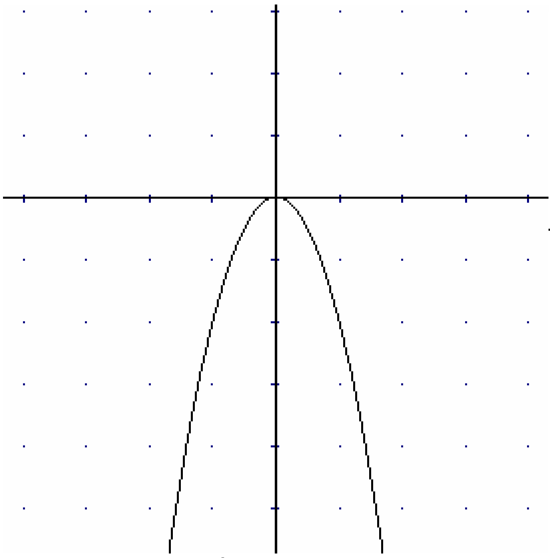
Nota:
La paràbola $y = ax^2 + p$ és un trasllat vertical (de p unitats) de la paràbola $y = ax^2$
La paràbola $y = a(x-q)^2$ és un trasllat horitzontal (de q unitats) de la paràbola $y = ax^2$

13. Al llençar una pedra a l'aire l'altura de la pedra segueix la següent funció $f(t) = -5t^2 + 50t$ on t és el temps en segons, i f(t) l'altura en metres.
Calculeu en quin segon s'assoleix la màxima altura i quina és la màxima altura
En quin segon cau a terra?.
Representeu la funció.

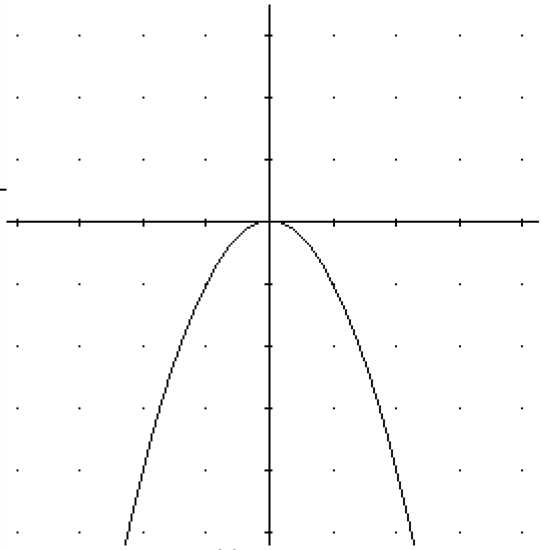
14. Un jugador de futbol es troba a 8 metres de la porteria. El porter està a 4 metres i pot cobrir amb un bot fins 2'5 metres d'alçada. El jugador pot escollir per fer el llançament entre dues trajectòries, les corresponents a les funcions $y = 0'4x - 0'05x^2$ i $y = 1'6x - 0'2x^2$. Quina és millor? Per què?.

15. Identifiqueu les següents funcions:

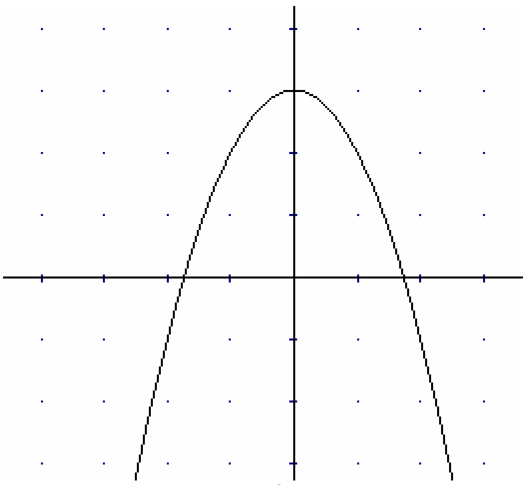
$f(x) = -x^2$ $\quad$ $g(x) = -x^2 + 3$ $\quad$ $m(x) = -x^2 - 3$ $\quad$ $n(x) = -2x^2$



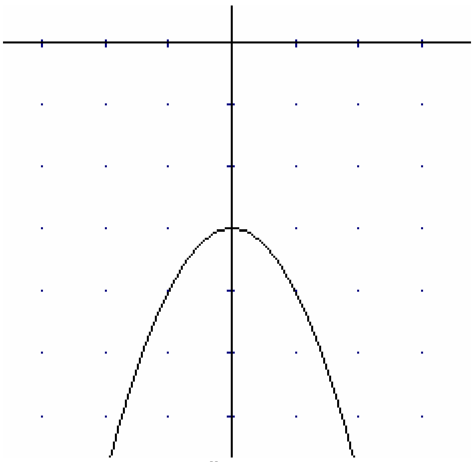
a)



b)



c)



d)