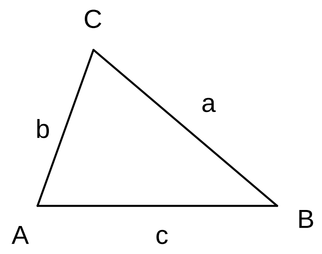
Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

TRIANGLES. TEOREMA DE PITÀGORES.

Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la figura geomètrica del plànol formada per 3 segments anomenats costats els extrems dels quals es tallen 2 a 2 en 3 punts anomenats vèrtexs.

Els vèrtexs s'escriuen en lletres majúscules i el costat oposat al vèrtex en la mateixa lletra minúscula.



Propietats:
1.- La suma de dos costats és major que l'altre costat.
2.- La suma dels angles d'un triangle mesura 180º.

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}, A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si els costats i els angles corresponents són iguals.

Criteris d'igualtat de triangles.

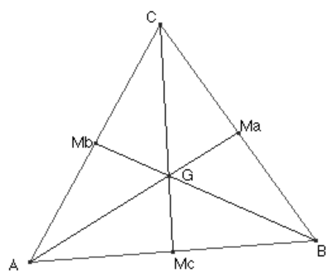
Criteri 1.
Dos triangles són iguals si tenen iguals dos costats i l'angle comprés entre ells.
Criteri 2.
Dos triangles són iguals si tenen igual un costat i els angles contigus.
Criteri 3.
Dos triangles són iguals si tenen els costats corresponents iguals.

Classificació dels triangles:

Segons els costats:
- **Equilàter**: Té els 3 costats iguals.
- **Isòsceles**: Té 2 costats iguals.
- **Escalè**: Té els tres costats desiguals.

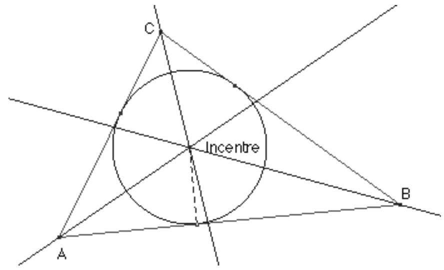
Segons els angles:
- **Acutangle**: Té els 3 angles aguts.
- **Rectangle**: Té un angle recte i els altres aguts.
- **Obtusangle**: Té un angle obtús i els altres aguts.

Altres elements d'un triangle:
La **mitjana**: És el segment que uneix un vèrtex i el punt mig del costat oposat al vèrtex.
Les tres mitjanes d'un triangle es creuen en un punt G anomenat **baricentre** o centre de gravetat del triangle.

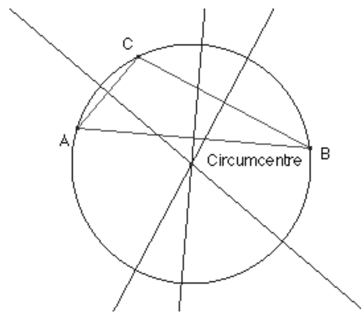


Propietat del baricentre d'un triangle.
El baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

La **bisectriu**: És la recta que passa pel vèrtex que formen dos costats i divideix per la meitat a l'angle que formen els mateixos costats.
Les tres bisectrius d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **incentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència inscrita al triangle.

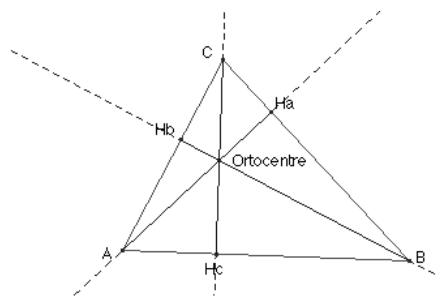


La **mediatriu**: És la recta que passa pel punt mig de cada costat i és perpendicular al costat.
Les 3 mediatrius d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **circumcentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència circumscrita al triangle.



L'**altura**: És la recta que passa per un vèrtex i es perpendicular al costat oposat.
Les tres altures d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **ortocentre**.

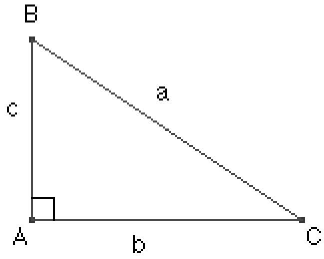
Normalment considerem l'altura d'un triangle com el segment de la recta altura que uneix el vèrtex i el punt del costat oposat, $\overline{CH_C}$, $\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$.



Propietat: **Àrea d'un triangle**.

L'àrea d'un triangle és igual a $A = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ la fórmula no depén de la base escollida.

Teorema de Pitàgores



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90º$ d'hipotenusa a i catets b, c

Aleshores, $a^2 = b^2 + c^2$

El teorema de Pitàgores també es pot enunciar de la forma següent:

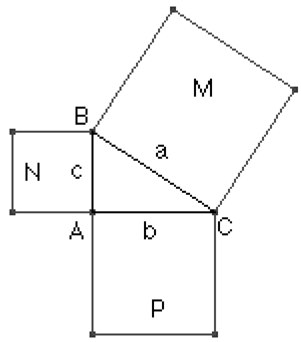
El quadrat construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle té la mateixa àrea que la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets:

$\text{àrea}M = a^2$

$\text{àrea}P = b^2$

$\text{àrea}N = c^2$

$a^2 = b^2 + c^2$



àrea M = àrea P + àrea N

Teorema de l'altura i del catet en un triangle rectangle.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90º$

Siga l'altura $h = \overline{AH}$ sobre la hipotenusa.

Siga $m = \overline{BH}$ la projecció del catet c sobre la hipotenusa.

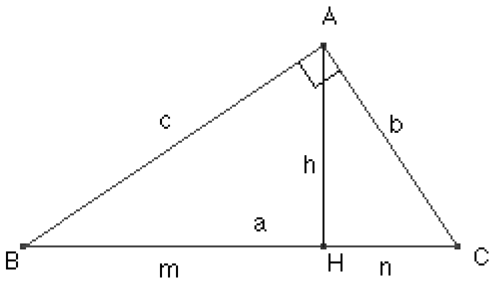
Siga $n = \overline{HC}$ la projecció del catet b sobre la hipotenusa.

Aleshores,

a) $h^2 = m \cdot n$ **Teorema de l'altura.**

b) $b^2 = n \cdot a$ **Teorema del catet.**

c) $c^2 = m \cdot a$ **Teorema del catet.**



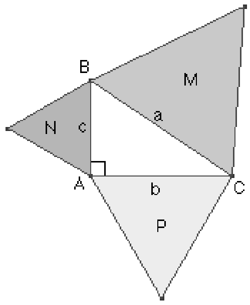
Teorema invers del teorema de Pitàgores:

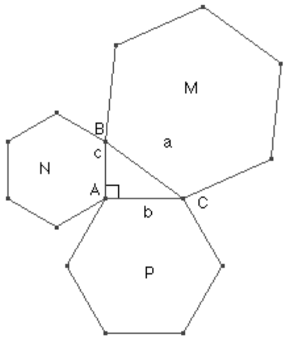
Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$

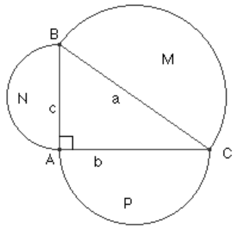
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i l'angle $\angle BAC = 90º$

Generalització del teorema de Pitàgores:

L’àrea de la figura construïda sobre la hipotenusa és la mateixa que la suma de les àrees de les figures semblants construïdes sobre els catets.





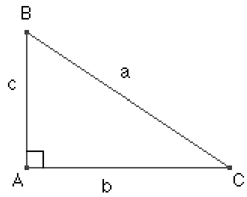


$$\text{àrea M} = \text{àrea N} + \text{àrea P}$$

Exercicis d’autoaprenentatge

Nota: Per fer la resolució dels exercicis d’aquest tema s’ha d’aplicar el teorema de Pitàgores, el qual només es pot aplicar a triangles rectangles.

a) Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90^{o}$ $a = 13, b = 10$
Calculeu el costat c.



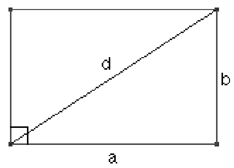
Aplicant el teorema de Pitàgores.

$a^2 = b^2 + c^2$

$13^2 = 10^2 + c^2$, $169 = 100 + c^2$, $c^2 = 69$

Aleshores, $c = \sqrt{69}$.

b) Calculeu la diagonal del rectangle de costats $a = 8, b = 15$



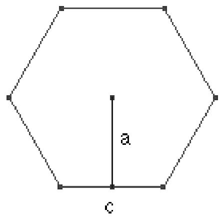
Les diagonals d’un rectangle divideixen el rectangle en dos triangles rectangles iguals.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$d^2 = a^2 + b^2$

$d^2 = 8^2 + 15^2$, $d^2 = 64 + 225$, $d^2 = 289$

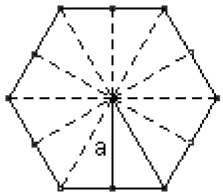
Aleshores, $d = \sqrt{289} = 17$

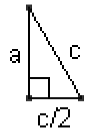
c) Calculeu l’apotema i l’àrea de l’hexàgon regular de costat $c = 6$



L’apotema és el segment que uneix el centre de l’hexàgon i el punt mig d’un costat.
El radi de la circumferència circumscrita a l’hexàgon mesura el mateix que el costat.

El centre de l'hexàgon, el punt mig d'un costat i el vèrtex del costat formen un triangle rectangle (en l'hexàgon hi ha 12 triangles rectangles iguals)
Aplicant teorema de Pitàgores





$$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2$$

$6^2 = 3^2 + a^2$, $36 = 9 + a^2$, $a^2 = 27$

Aleshores l'apotema mesura $a = \sqrt{27}$

Per calcular l'àrea de l'hexàgon multiplicarem per 6 l'àrea del triangle equilàter de costat $c = 6$

$$A = 6 \cdot \left(\frac{c \cdot a}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{6 \cdot \sqrt{27}}{2}\right) = 18\sqrt{27} \cong 93.53$$

Exercicis proposats.

1. Anomenem **ternes pitagòriques** a tres nombres naturals (x,y,z) que determinen un triangle rectangle, és a dir, $x^2 + y^2 = z^2$.

Exemple (3,4,5) $3^2 + 4^2 = 5^2$

Comproveu si les ternes següents són pitagòriques, calculant el terme que falta:

a) (21, 72, 75) b) (12, 35, x) c) (x, 28, 35) d) (28, 45, x) e) (45, 60, x)

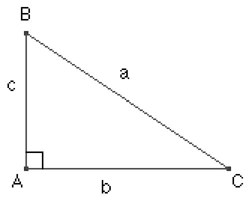
f) (x, 15, 17) g) (20, x, 101) h) (x, 75, 85) i) (x, 135, 153) j) (24, x, 145)

2. Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90º$

Determineu el costat que falta i la seua àrea:

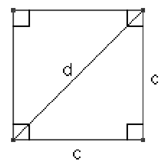
a) a = 10, b = 8 b) b = 21, c = 28

c) a = 15, c = 10 d) a = 8, b = 5



3. Calculeu la diagonal del quadrat de costat:

a) c = 4 b) c = 10 c) c = 15 d) c = 25 e) c = 125 f) c = 250



4. Calculeu el costat i l'àrea del quadrat de diagonal:

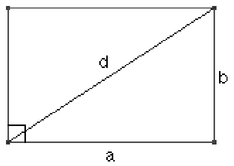
a) d = 4 b) d = 10 c) d = 15 d) d = 25 e) d = 125 f) d = 250

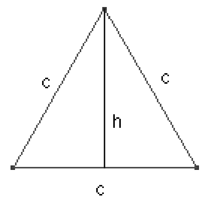
5. Calculeu la diagonal del rectangle de costats:

a) $a = 6$, $b = 8$ b) $a = 21$, $b = 28$

c) $a = 12$, $b = 15$ d) $a = 8$, $b = 10$

e) $a = 10$, $b = 20$ f) $a = 5$, $b = 25$





6. Calculeu l'altura i l'àrea del triangle equilàter de costats:

a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$ d) $c = 25$ e) $c = 125$

7. Calculeu el costat i l'àrea del triangle equilàter d'altura:

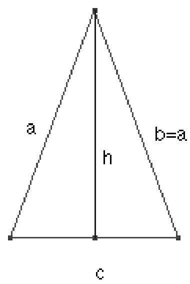
a) $h = 4$ b) $h = 10$ c) $h = 15$ d) $h = 25$ e) $h = 125$ f) $h = 250$

8. Calculeu l'altura sobre el costat distint i l'àrea dels triangles isòsceles següents:

a) $a = 10$, $b = 10$, $c = 12$ b) $a = 16$, $b = 16$, $c = 10$

c) $a = 12$, $b = 12$, $c = 15$ d) $a = 8$, $b = 8$, $c = 10$

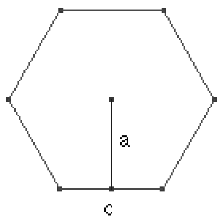
e) $a = 10$, $b = 10$, $c = 5$ f) $a = 5$, $b = 5$, $c = 2$



9. Calculeu l'apotema i l'àrea de l'hexàgon regular de costat:

a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$

d) $c = 25$ e) $c = 125$ f) $c = 250$



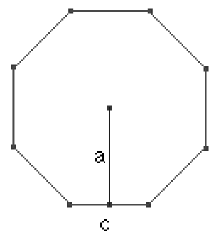
10. Calculeu el costat i l'àrea d'un hexàgon regular d'apotema:

a) $a = 4$ b) $a = 10$ c) $a = 15$ d) $a = 25$ e) $a = 125$ f) $a = 250$

11. Calculeu l'apotema i l'àrea de l'octògon regular de costat:

a) c = 4 b) c = 10 c) c = 15

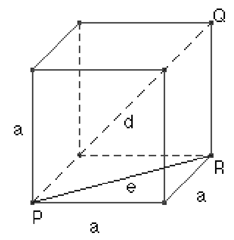
d) c = 25 e) c = 125 f) c = 250



12. Calculeu la diagonal d'una cara $e = \overline{PR}$ i la diagonal del cub $d = \overline{PQ}$ d'aresta:

a) a = 4 b) a = 10 c) a = 15

d) a = 25 e) a = 125 f) a = 250



13. Calculeu l'aresta i el volum del cub de diagonal:

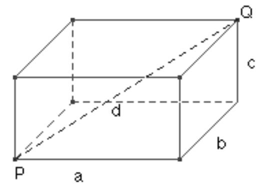
a) d = 4 b) d = 10 c) d = 15 d) d = 25 e) d = 125 f) d = 250

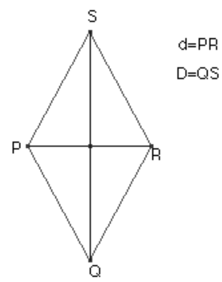
14. Calculeu la diagonal $d = \overline{PQ}$ de l'ortòedre les arestes del qual són:

a) a = 6, b = 6, c = 3 b) a = 3, b = 4, c = 5

c) a = 3, b = 6, c = 8 d) a = 8, b = 8, c = 10

e) a = 15, b = 10, c = 5 f) a = 10, b = 20, c = 25

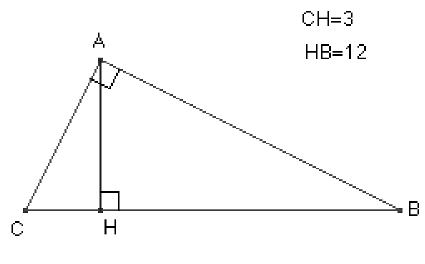




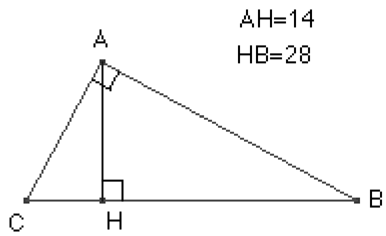
15. Calculeu els costats d'un rombe de diagonals:

a) d = 6, D = 8 b) d = 21, D = 28 c) d = 12, D = 15 d) d = 8,

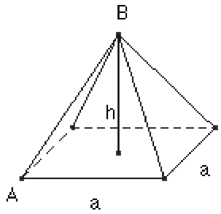
16. Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = 90^{\circ}$).
Calculeu l'altura $\overline{AH}$.



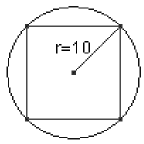
17. Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = 90º$).
Calculeu la projecció $\overline{CH}$.



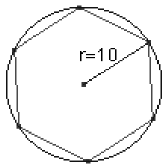
18. Siga la piràmide recta de base quadrangular.
a) Calculeu l'altura h sabent que el costat de la base mesura 100 m i l'aresta lateral $\overline{AB} = 150$ m.
b) Calculeu la superfície de la piràmide.
c) Calculeu el volum de la piràmide $\left(V = \frac{1}{3} Sb \cdot h\right)$.



19. Calculeu l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de radi 10 m.



20. Calculeu l'apotema i l'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de radi 10 cm.



21. En la següent figura quan mesura el segment x