Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

SUCCESSIONS.
PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES. PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES.

Successió.

Una successió és un conjunt ordenat d'infinits nombres $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ que representem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Cadascun d'ells s'anomena terme de la successió.

a_n s'anomena terme general o terme n-èsim de la successió.

Exemples:

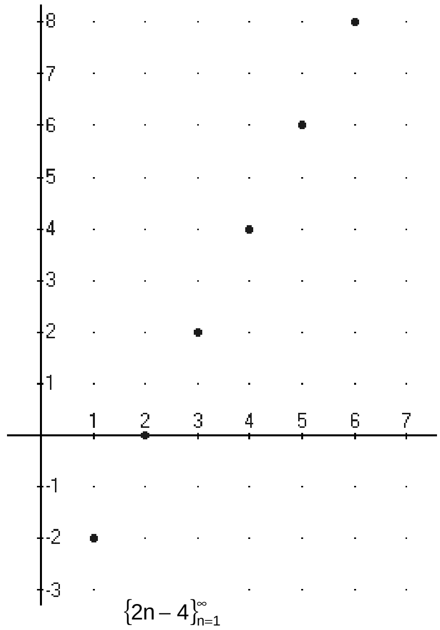
–2, 0, 2, 4,.............. es pot escriure $\{2n-4\}$

1, 4, 9, 16,............ es pot escriure $\{n^2\}$

$\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, ...$ es pot escriure $\{\sqrt{n+2}\}$

Per representar una successió en l'eix d'abscisses representem el nombres naturals i en l'eix d'ordenades els valors de la successió.

El resultat són punts en el plànol real.



$\{2n-4\}_{n=1}^{\infty}$

Progressió aritmètica

Una progressió aritmètica és una successió tal que la diferència entres dos termes consecutius és constant. Aquesta constant s'anomena d diferència .

Exemples:

7, 10, 13, 16, 19,....... És una progressió aritmètica de diferència $d = 3$

4, 2'5, 1, -0'5, -2,....... És una progressió aritmètica de diferència $d = -1'5$

Propietats:

Terme general	Suma del n primers termes
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Progressió geomètrica.

Una progressió geomètrica és una successió tal que el quocient entres dos termes consecutius és constant. Aquesta constant s'anomena r raó o quocient.

Exemples:

3, 6, 12, 24, 48,....... És una progressió geomètrica de raó $r = 2$

2, 0'2, 0'02, 0'002, 0'0002,....... És una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{10}$

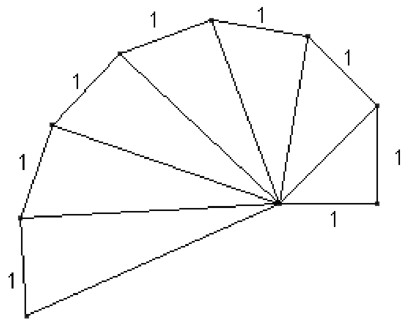
Propietats:

Terme general	Suma del n primers termes	Suma de tots els termes si $0 < r < 1$	Producte dels n primers termes
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$	$S = \frac{a_1}{1-r}$	$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Exercici 1:

Partint d'un triangle rectangle i isòsceles de catets 1cm, construïm la següent figura.

a) Determineu els valors de la successió de les hipotenuses dels triangles rectangles.
b) Determineu el terme general de la successió.



Siga $\{h_n\}$ la successió de les hipotenuses.

Aplicant el teorema de Pitàgores al primer triangle:

$(h_1)^2 = 1^2 + 1^2$, aleshores, la primera hipotenusa és: $h_1 = \sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al segon triangle:

$(h_2)^2 = (h_1)^2 + 1^2$, aleshores, $h_2 = \sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al tercer triangle:

$(h_3)^2 = (h_2)^2 + 1^2$, aleshores, $h_3 = \sqrt{4}$

Per tant, $h_1 = \sqrt{2}, h_2 = \sqrt{3}, h_3 = \sqrt{4}, h_4 = \sqrt{5}, h_5 = \sqrt{6}, h_6 = \sqrt{7}, h_7 = \sqrt{8}$,.........

El terme general de la successió és: $h_n = \sqrt{n+1}$

Exercici 2:

En una progressió aritmètica $\{a_n\}$, el terme $a_{10} = 3$ i la diferència és $d = -2$. Calculeu:

a) El terme general de la progressió.
b) La suma dels 20 primers termes.
c) La suma dels n-primers termes.

El terme general és $a_n = a_1 + d(n-1)$, aleshores, $a_{10} = a_1 + (-2) \cdot 9$, $a_{10} = 3$.

Per tant, $3 = a_1 - 18$. Aleshores el primer terme és $a_1 = 21$.

El terme general de la progressió és: $a_n = 21 - 2(n-1)$. Simplificant $a_n = 23 - 2n$

Calculem $a_{20} = 21 - 2 \cdot 19 = -17$.

La suma dels 20 primers termes és: $S_{20}=\left(\frac{a_1+a_{20}}{2}\right)\cdot 20=\left(\frac{21+(-17)}{2}\right)\cdot 20=40$

La suma dels n-primers termes és: $S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n=\left(\frac{21+23-2n}{2}\right)\cdot n$

Simplificant: $S_n=\frac{n\cdot(44-2n)}{2}$

Exercici 3:

Donada la successió $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, ...$ calculeu:

a) El terme general.
b) La suma del n-primers termes.
c) La suma dels infinits termes.
d) El producte dels 10 primers termes.

Efectuant les divisions dels termes consecutius, podem observar que la successió és una progressió geomètrica de raó $r=\frac{1}{2}$.

El terme general és $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$, és a dir, $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}$

La suma dels n-primers termes és $S_n=\frac{a_1-a_n\cdot r}{1-r}$, és a dir, $S_n=\frac{3-\frac{3}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$, $S_n=\frac{6\left(2^n-1\right)}{2^n}$

Per ser la raó $0<r<1$ la suma dels infinits termes és $S=\frac{a_1}{1-r}$, és a dir, $S=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$

$a_{10}=\frac{3}{2^9}$

El producte dels 10 primers termes és $P_{10}=\sqrt{(a_1\cdot a_{10})^{10}}$, és a dir,

$$P_{10}=\sqrt{\left(3\cdot\frac{3}{2^9}\right)^{10}}=\sqrt{\left(\frac{3^2}{2^9}\right)^{10}}=\frac{3^{10}}{2^{45}}$$

Exercicis proposats

1. Determineu els primers 5 termes de les següents successions:

a) $\{2n-4\}$

b) $\{3\cdot 2^{n+1}\}$

c) $\left\{\dfrac{n-3}{2n+1}\right\}$

d) $\{n^2-n\}$

e) $\{\sqrt{2n-1}\}$

f) $\{(-1)^n\}$

g) $\{\sqrt[n+1]{4}\}$

h) $\{\sqrt[n]{n+1}\}$

2. Determineu els 4 termes següents i el terme general de les successions:

a) 1, 4, 7, 10, 13, 16,............

b) 5, 1, -3, -7, -11, -15,.........

c) $\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}, 8,$..........

d) $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-6}{3},$........

e) 0, 5, 10, 15, 20, 25,............

f) 192, 96, 48, 24, 12,.......

g) 23, 2’3, 0’23, 0’023, 0’0023,.....

h) 1, -1, 1, -1, 1, -1,........

i) -3, 3, -3, 3, -3, 3,...........

j) $\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{45}{2}, \frac{135}{2}, \frac{405}{2},$......

k) $\frac{5}{7}, \frac{10}{21}, \frac{20}{63}, \frac{40}{189}, \frac{80}{567},$.....

l) 1, 4, 9, 16, 25, 36,........

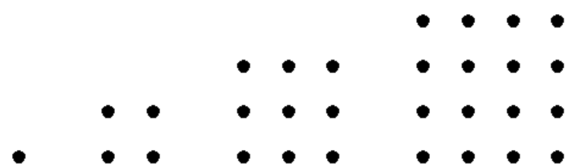
m) 3, 6, 11, 18, 27, 38,........

n) 2, 6, 12, 20, 30, 42,.........

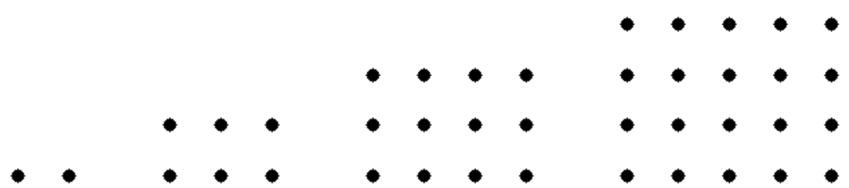
o) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{13},$.......

p) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{8},$..........

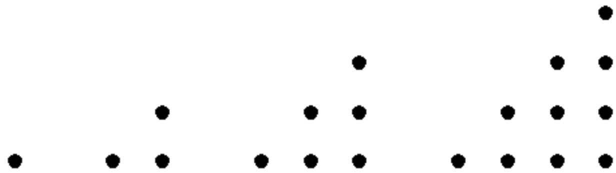
3. Seguiu la sèrie de nombres quadrangulars (nombre de punts 1, 4, 9,....). Determineu el terme general.



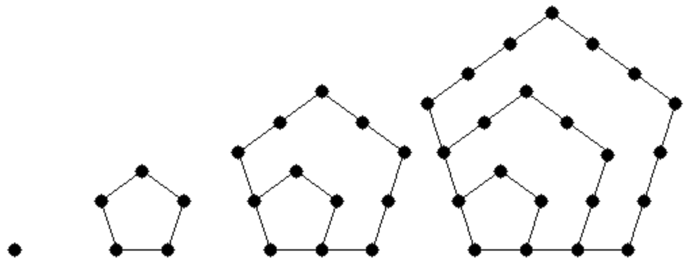
4. Seguiu la sèrie de nombres rectangulars (nombre de punts 2, 6, 12,....). Determineu el terme general.



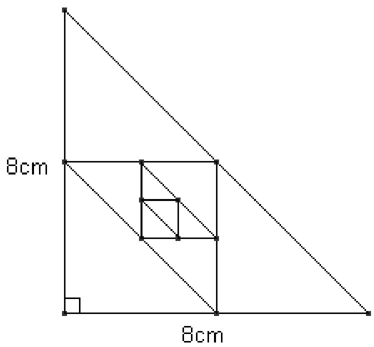
5. Seguiu la sèrie de nombres triangulars(nombre de punts 1, 3, 6,....). Determineu el terme general.



6. Seguiu la sèrie de nombres pentagonals (nombre de punts 1, 5, 12,...). Determineu el terme general.

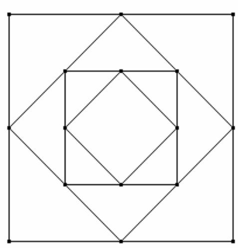


7. Donat un triangle rectangle i isòsceles de catets 8cm inscrivim amb els punts migs del costat un altre triangle rectangle i així successivament.



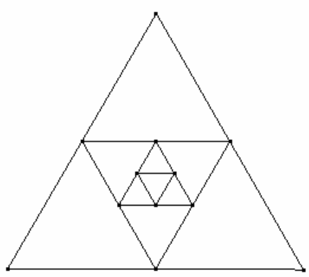
a) Determineu els primer 4 termes de la successió dels perímetres. Determineu el terme general.
b) Determineu els primers 4 termes de la successió de les àrees. Determineu el terme general.

8. Donat un quadrat de costat 1cm inscrivim amb els punts migs del costat un altre quadrat, i així successivament.



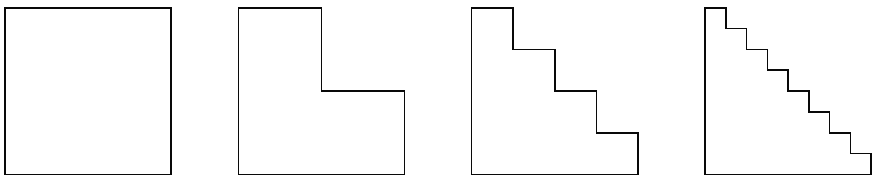
a) Determineu els primer 4 termes de la successió dels perímetres. Determineu el terme general.
b) Determineu els primers 4 termes de la successió de les àrees. Determineu el terme general.

9. Donat un triangle equilàter de costat 1cm inscrivim amb els punts migs del costat un altre triangle equilàter i així successivament.



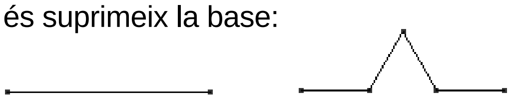
a) Determineu els primer 4 termes de la successió dels perímetres. Determineu el terme general.
b) Determineu els primers 4 termes de la successió de les àrees. Determineu el terme general.

10. Donat un quadrat de 4 cm de costat

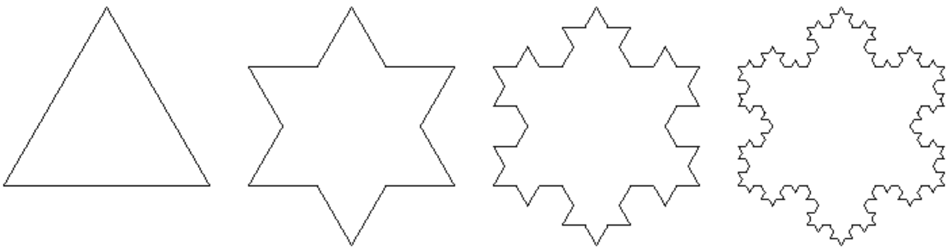


Determineu el perímetre i l'àrea de la successió de figures.

11. Cada costat d'un triangle equilàter es divideix en 3 parts igual sobre la part central es dibuixa un triangle equilàter i és suprimeix la base:



Aquest procediment s'anomena primera iteració de la fractal de Koch (Von KOCH Helge 1870-1924). Sobre cada segment de la primera iteració tornem a aplicar el procediment, i així successivament:
Suposem que la longitud del costat del triangle equilàter és 1.



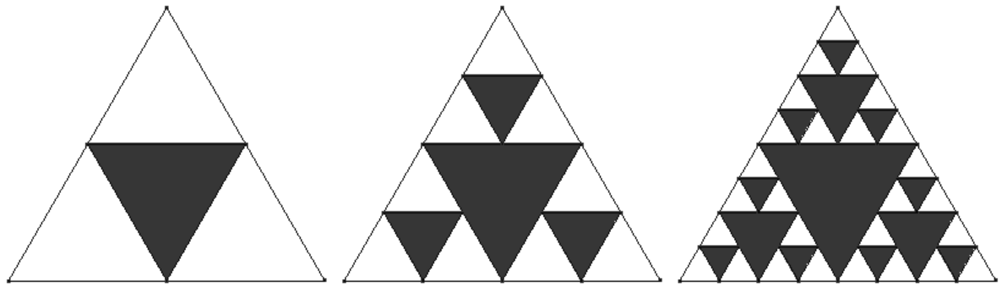
1ª iteració 2ª iteració 3ª iteració

a) Quants segments té la fractal de Koch en la 4 reiteració i el la n-èsima.
b) Quina seria el perímetre de la segona, tercera, quarta i la n-èsima iteració.
c) Calculeu l'àrea de la segona i tercera reiteració. Quina seria l'àrea de la n-èsima reiteració.

12. El triangle de Sierpinski (1882-1969) és una fractal que es construeix de la forma següent:

I. L'objecte inicial és un triangle equilàter. S'uneixen els punts migs de cada costat del triangle i s'extrau el triangle equilàter central (el pintat de negre). I tenim la primera iteració.
II. Successivament apliquem el procés als altres triangles equilàters pintats en blanc.

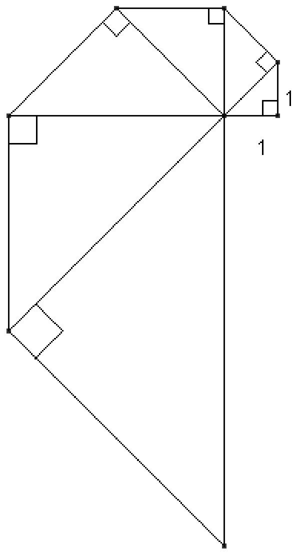
Suposem que el primer triangle té costat 10cm.



1ª iteració 2ª iteració 3ª iteració

a) Calculeu l'àrea en blanc de la primera segona i tercera i de la n-èsima iteració.

13. Sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets 1, 1 dibuixem un triangle rectangle i isòsceles de catets la hipotenusa del triangle anterior i així successivament (vegeu la figura).



a) Calculeu l'àrea de cadascun dels triangles del dibuix.
b) Calculeu l'àrea del triangle n-èsim.
c) Calculeu la suma dels 4 primers, dels 5 primers i dels 10 primers.

14. Una pilota és llança des d'una altura de 4m.

Cada rebot assoleix $\frac{3}{4}$ de l'altura anterior.

Determineu l'altura del primer, segon, tercer, quart rebot. Determineu l'altura en el rebot n-èsim.

15. Dobleguem un full quadrat d'1 m^2 per la meitat. Una vegada doblegat tornem a doblegar per la meitat i així successivament.

Quants plecs conté al doblegar-lo per primera vegada, per segona, per tercera i per n-èsima vegada.

16. En una progressió aritmètica el terme $a_8 = 21$ i la diferència és $d = -2$. Calculeu:
a) Els 4 primers termes i els terme general.
b) La suma dels 10 primers termes i la suma dels n primers termes.

17. En una progressió aritmètica els termes $a_6 = 10$, $a_{20} = 17$. Calculeu:
a) La diferència i el terme general.
b) La suma dels 20 primers termes i la suma dels n primers termes.

18. En una progressió aritmètica els termes $a_4 = 5$, $a_{16} = 1$. Calculeu:
a) La diferència i el terme general.
b) La suma dels 100 primers termes i la suma dels n primers termes.

19. En una progressió aritmètica el terme $a_{10} = 5$ i la suma $S_5 = 130$. Calculeu:
a) La diferència i el terme general.
b) La suma dels 10 primers termes i la suma dels n primers termes.

20. En una progressió aritmètica la diferència és $d = 3$ i la suma $S_{10} = 55$. Calculeu:
a) El terme general.
b) La suma dels n primers termes.

21. Quant sumen els 1000 primers naturals (1, 2, 3, 4,...........)

22. Quant sumen els primers 100 múltiples de 3 (0, 3, 6, 9, 12,.........)

23. En una progressió geomètrica el terme $a_5 = 48$ i la raó és $r = -2$. Calculeu:
a) Els 4 primers termes i el terme general.
b) La suma dels 5 primers termes.
c) El producte dels 5 primers termes.

24. En una progressió geomètrica el terme $a_4 = 48$ i la raó és $r = \frac{1}{3}$. Calculeu:
a) El terme general.
b) La suma dels 4 primers termes i la suma dels infinits termes.
c) El producte dels 4 primers termes.